

# 流体音勉強会報告

大野泰治郎

2019年2月7日

## 1 はじめに

前回に引き続き FDTD による 2 次元音場のサンプルプログラムを変更してヘルムホルツ共鳴のシミュレーションを実現することを目標とする。前回の発表で不明であった次の 2 点について、調査したので、その結果を示す。

- サンプルに使用されている支配方程式は何か
- 前回、音源が配置された空間からネックを通し、キャビティへと圧力がうまく伝搬されていなかった、その解決方法は何か。

使用マシン環境

- OS ubuntu 16.04LTS
- メモリ 4G
- プロセッサ Intel Core i5-2320 CPU 3.0GHz x 4
- ディスク 227.5GB

## 2 進捗の詳細

### 2.1 支配方程式の導出

基礎方程式は、オイラーの運動量保存式と質量保存式および理想気体における状態式（圧力 (p) を密度 (ρ) で表した）である。この基礎方程式での速度ベクトルおよびその時間微分、空間微分を一次の微小量とし、さらに途中計算で生じる 2 次の微小量を省略して以下に示す支配方程式が得られる。手順は以下のである。

プログラムの対象とする物理量は x,t を空間および時間を表す変数として、速度ベクトル v(x,t)、圧力 p(x,t) である。密度は後でしめすように (x,t) = ρ₀ + ρ' と平均量とその変分（一次微小

量）というようにし、プログラム上では ρ₀ しか現れない。

オイラー方程式

$$dv/dt = -\nabla p \quad (1)$$

連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\text{div}(v) \quad (2)$$

状態式

$$p + P_0 = \text{定数}, \quad \gamma \text{ は比熱比}, P_0 \text{ は大気圧} \quad (3)$$

つまり

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = \text{定数} \quad -1 \frac{\partial}{\partial t} = \frac{P}{\partial t} = c^2 \frac{\partial}{\partial t} \quad (4)$$

$$\text{ここで } c(\text{音速}) = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

この基本式に次の近似を用いる。

次の量は一次微小量とする。ただし ρ' は密度の平均量 ρ₀ との変位である。

$$\text{一次の微小量 } v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \rho', \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \quad (5)$$

計算途中で出てくる 2 次以上の微小量をすべて無視することによって

オイラー方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad (6)$$

質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c^2 \rho_0 \text{div } v \quad (7)$$

この質量保存則の両辺を t で偏微分し、オイラー方程式を左辺に代入すると波動方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta v \quad (8)$$

が出てくる。

質量保存則を差分化すると次のようになる。

$${}_{t}p = -C_1({}_{x_i}v_{x_i}) \quad (9)$$

$C_1$  は定数で次の値、 $c^2 \frac{t}{h}$  同様に、オイラー方程式を差分化すると次のようになる。

$${}_{t}v_{x_i} = -C_2 {}_{x_i}p, \quad (10)$$

$C_2$  は定数で次の値、 $\frac{t}{h}$

後は、FDTD の差分アルゴリズムに注意することと、境界条件（背後の空間領域の上側、横はPML、ネックおよびキャビティおよび空間の下側はノイマン条件）に注意するとプログラムを作成することができる。

音源は時間に関するガウス型音源を用いている。  
音源 =  $m \exp(-a(t - t_0)^2)$

## 2.2 圧力伝搬がうまく伝わらなかったこと

理由は次のようなものであった。空間の下部およびネック、キャビティの境界条件はノイマン型である。すなわち水平な境界では速度の  $y$  成分は 0、垂直な境界では速度の  $x$  成分は 0 に設定していた。しかし境界上で他方の成分つまり、水平境界上での速度の  $x$ -成分、垂直境界上での速度の  $y$ -成分の値を設定していなかった。この値を設定することにより、圧力がネックを通してキャビティまで届くことが確認され、キャビティ内での圧力振動がみられるようになった。

## 定数の宣言

```
xmax 1000.000e-3 軸解析領域x [m]
xcavity 50.000e-3 キャビティ幅 [m]
ycavity 50.000e-3 キャビティ高 [m]
xneck 10.000e-3 ネック幅 [m]
yneck 20.000e-3 ネック高 [m]
yspace 500.000e-3 背後空間高
ymax 570.000e-3 軸解析領域y [m]
tmax 6.000e-3 解析時間 [s]
dh 5.000e-4 空間離散化幅 [m]
dt 1.000e-6 時間離散化幅 [s]
c0 3.435e2 空気の音速 [m/s]
row0 1.205e0 空気の密度 [kg/m^3]
xdr 500.000e-3 軸音源位置x [m]
ydr 150.000e-3 軸音源位置y [m]
m 1.000e0 ガウシアンパルス最大値
[m^3/s]
a 2.000e6 ガウシアンパルス係数
[-]
t0 2.000eガウシアンパルス中心時間
-3 [s] 250Hz (cut off)
//PML
pl 16 層数
pm 4 減衰係数テーパー乗数
emax 1.500e0 減衰係数最大値
```

### 3 数値計算結果

- キャビティ、ネックおよび背後の空間の圧力分布のスナップショット。圧力の時系列データを与える。
- 観測箇所は、音源からキャビティ下部までの10ヶ所 図番号0：キャビティ下部の境界上 図番号4：ネック中央点 図番号9：音源直下

### 4 今後の予定

1. FTT を実装して観測データのスペクトルを視る。
2. 共鳴周波数の検証

### 5 その他・要望連絡事項等

私の2年間の(実質3週間弱)研究成果としては、この程度のことになるかと思えます。次の研究のターゲットとしては、音場と流体場の相互作用で生じる現象を少しでも解明できればと考えています。

#### 参考文献

FDTD 法で視る音の世界 日本音響学会編  
音響サイエンスシリーズ14 豊田政弘  
編著



