2019/11/16

ディラック測度と確率分布の弱収束

大野泰治郎

目次

1 目的

ディラック測度 (μ_0) が確立分布の弱収束として表現できる必要十分条件を与える。

1.1 分布の弱収束

簡単のため空間は実数空間 R で考える。またディラック測度 μ_0 は 0 上で 1 をとる点測度つまり $\mu_0(\{0\}) = 1$ とする。R 上に分布列 μ_n が μ_0 へ弱収束 ($w-\lim$) するとは R 上の任意のコンパクトサポート上の連続関数φに対して

$$lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) d\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) d\mu_0 \tag{1}$$

が成立することである。

1.2 $w-\lim \mu_n = \mu_0$ の成立条件

命題

$$w\text{-}\lim \mu_n = \mu_0 \text{が成立するための必要十分条件は、任意の} \varepsilon > 0 \text{に対して} \lim_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\mu_n = 1 \text{が成立することである。} \tag{2}$$

証明は次のようにする。

必要性）

$1_{[-\varepsilon,\ \varepsilon]}$ を区間 [-ε, ε] 上の定義関数（即ち、[-ε, ε] 上で 1 をとり他は 0 をとる関数) とする。

連続関数 ϕ^+、ϕ^- を原点で 1 をとり、$1_{[-\varepsilon/2,\ \varepsilon/2]} \le \phi^- \le 1_{[-\varepsilon,\ \varepsilon]} \le \phi^+$ を満たすように取る。

このとき、$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^-(x) d\mu_n \le \mu_n[-\varepsilon, \varepsilon] \quad \le \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^+ d\mu_n$

各項nを ∞ にすると左辺および右辺は μ_nがμ_0へ弱収束することから$\phi^-(0), \phi^+(0)$ つまり 1 と等しい。従って、$\lim_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\mu_n = 1$

十分性）

任意の R 上の有界な連続関数φをとる。$\varepsilon > 0$ を任意にとる。φは原点 0 で連続なので、$|\phi(0) - \phi(x)| < \varepsilon$

$(\forall|x|<\delta)$ となる δ を取ることができる。また ϕ は有界なので $\sup_{x\in R}\phi(x)=|\phi|^{\infty}<\infty$ とする。この $\varepsilon,\delta>0$ に対して n_{ε} を $\mu_n((-\infty,-\delta)\cup(\delta,\infty))=1-\mu_n([-\delta,\delta])<\varepsilon\ (\forall n>n_{\varepsilon})$ となるように取る。このとき、

$$
\begin{aligned}
&|\int_{-\infty}^{\infty}\phi\, d\mu_n-\phi(0)|=|\int_{-\infty}^{\infty}\phi\, d\mu_n-\int_{-\infty}^{\infty}\phi(0)d\mu_n| \\
&\leq|\int_{-\infty}^{\infty}\phi\, d\mu_n-\int_{-\delta}^{\delta}\phi\, d\mu_n|+|\int_{-\delta}^{\delta}\phi\, d\mu_n-\int_{-\delta}^{\delta}\phi(0)d\mu_n|+|\int_{-\delta}^{\delta}\phi(0)d\mu_n-\int_{-\infty}^{\infty}\phi(0)d\mu_n| \\
&\leq|\int_{\delta}^{\infty}\phi\, d\mu_n+\int_{-\infty}^{\delta}\phi\, d\mu_n|+|\int_{-\delta}^{\delta}(\phi-\phi(0))d\mu_n|+|\int_{\infty}^{-\delta}\phi(0)d\mu_n+\int_{\delta}^{\infty}\phi(0)d\mu_n| \\
&\leq 2|\phi|^{\infty}\varepsilon+\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3}
$$

従って、

$$
lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)d\mu_n=\phi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)d\mu_0 \tag{4}
$$

1.3 例 (LightHill)

$\mu_n=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon_n}{x^2+\varepsilon_n{}^2}dx$ とおく。ただし ε_n は $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ を満たすようにとる。まず、

$$
\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{x^2+(\varepsilon_n)^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{(\frac{x}{\varepsilon_n})^2+1}d(\frac{x}{\varepsilon_n})=\int_0^{\infty}\frac{1}{tan(\theta)^2+1}d(tan\ \theta)=\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi/2 \tag{5}
$$

なので、μ_n は R 上の確率測度である。さらに、

$$
\begin{aligned}
\int_{\delta}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{x^2+(\varepsilon_n)^2}dx=\int_{\frac{\delta}{\varepsilon_n}}^{\infty}\frac{1}{(\frac{x}{\varepsilon_n})^2+1}d(\frac{x}{\varepsilon_n})=\int_{\frac{\delta}{\varepsilon_n}}^{\infty}\frac{1}{y^2+1}dy\leq\int_{\frac{\delta}{\varepsilon_n}}^{\infty}\frac{1}{y^2}dy=\frac{\varepsilon_n}{\delta} \\
\text{故}\int_{-\delta}^{\delta}d\mu_n=1-\int_{\delta}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{x^2+(\varepsilon_n)^2}dx-\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\varepsilon_n}{x^2+(\varepsilon_n)^2}dx>1-2\frac{\varepsilon_n}{\delta} \\
\text{つまり}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}d\mu_n=1(\forall\ \delta>0.)\ \text{を満たす。即ち、上の命題により}\ w-lim\ \mu_n\text{は原点上のディラック測度である。} \tag{6}
$$