2020 年 11 月 25 日

小さいヘルムホルツ共鳴器は外部に音を漏らさない（関数解析的手法での音の解析）その２

大野泰治郎

目次

1 目的

小さいヘルムホルツ共鳴器から生じる（ヘルムホルツ）共鳴周波数を与えるグリーン作用素 $-\Delta^{-1}$ の固有値が存在し、その固有関数のサポートは、cabity（ヘルムホルツ共鳴器を実現する窪み）内にとどまることを示したい。

1.1 はじめに

ヘルムホルツ共鳴（周波数 $\frac{c\sqrt{A/(VL)}}{2\pi}$）を与える式 $x'' = -c^2A/(VL)x$ は単振動の方程式 $mx'' = -Kx$ に　m＝　ρ AL , K （バネ定数）＝ ρ A^2c^2/V を与えることで得られる [5][13p]。ここで、m は質量、ρは密度、c は音速、A はネックの面積 V は cabity の体積、L はネック長を表す。
この式を波動方程式　$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta_x u$ から導こうとすると、Δの固有値　$-\lambda^2$、固有関数 v_λ および $u(t,x) = f(t)v_\lambda(x)$ とおくと $\frac{\partial f \cdot v_\lambda}{\partial t^2} = -(c\cdot\lambda)^2 f\cdot v_\lambda$ 両辺から v_λ を消すと $\frac{\partial f}{\partial t^2} = -(c\cdot\lambda)^2 f$ となり、ヘルムホルツ共鳴周波数の正当性を示すには、ラプラシアンの固有値（グリーン作用素の固有値）が-A/LV (LV/A ≡ μ_0) であること、この目的を示すにはその固有関数のサポート領域は cabity をでないことを示せば良い。[*1]

2 準備

2.1 ラプラシアンの固有値（簡単な例）

2 次元の方形領域 [0,a]×[0,b] 上のディリクレ問題での-Δの固有値と固有関数は、
$\lambda = (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})\pi^2, f_\lambda = sin(\frac{m\pi}{a}x)sin(\frac{n\pi}{b}y)$ で与えられる [2][139p]。n,m = 1,2,...
従って、-Δの最小固有値は $(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})\pi^2$（グリーン作用素の最大固有値は, $\frac{a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)}$）である。

問題を定式化すると、$\Omega = [0,a]\times[0,b]$　, 境界条件 $f_\lambda(x) = 0(x \in \partial\Omega)$ のもとで $-\Delta(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$を満たすλ [*2]と f_λを $L^2(\Omega) \equiv \{f; \int_\Omega f^2 d\boldsymbol{x} < \infty\}$ の範囲ですべて明らかにすることとなる。

通常、変数分離を用いて計算するようだが、ここでは、フーリエによる三角関数 (sin 関数 と cos 関数) を使った展開を用いて解くことにする。

[*1] 別件だが、波動方程式の解の一意性（もちろん同じ境界条件で）は、ラプラシアンの固有空間の次元と関連する。つまり、固有空間の次元が 2 以上であれば、同じ境界条件、同じ波動方程式で複数の解が生じることになり、一般に固有空間の次元は有限ですらない。

[*2] 斉次境界条件 $\{f(x) = 0, \frac{\partial f}{\partial n} = 0\ x \in \partial\Omega$など境界条件が 0 で与えられていること$\}$ では、-Δの固有値は正の実数に限ることが簡単にわかる

まず、$f \in L^2[-\pi、\pi]$ に対して、次の三角関数による展開が成立する。*3

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)^{*4} \tag{1}$$

$$ここで、a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx \quad (0 \geq n), b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx \quad (0 < n) \tag{2}$$

この式は認めるとして、一般の区間 (α , β) へ式を変形すると次のようになる。*5

$$f(x) = \alpha_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi(2x-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}) + b_n sin(\frac{n\pi(2x-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}) \tag{6}$$

$$a_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)cos(\frac{n\pi(2x-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha})dx \quad (0 \geq n), b_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)sin(\frac{n\pi(2x-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha})dx \quad (0 < n) \tag{7}$$

ここで、α=0、β=b とする。このとき f(0)=0（つまり、ディリレク境界条件）であれば、f を (-b,b) 上で奇関数 $\tilde{f}$ に拡張できる。（この指摘は重要で、ノイマン境界の場合は、週関数に拡張でき、従って次に述べるように sin 関数の係数が 0 になる。）$\tilde{f}$ が奇関数なので、この展開での係数 a_n（ノイマン条件の場合は b_n）は０になる。つまり、$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n(\frac{\pi x}{b})), b_n = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} \tilde{f}(x)sin(n(\frac{2\pi x}{2b}))dx \quad (0 < n) = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)sin(n(\frac{\pi x}{b}))dx \quad (0 < n)$ となる。

この関係を用いて,-Δの固有関数 $f_\lambda(x,y)$ を最初に y に関して、展開すると
$f_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)sin(n(\frac{\pi y}{b})) \quad b_n(x) = \frac{2}{b}\int_0^b f(x,y)sin(n(\frac{\pi y}{b}))dy \quad (0 < n)$ さらに、$b_n(0) = 0$ なので同じように処理できて、結局 $f_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n} sin(m(\frac{\pi x}{a}))sin(n(\frac{\pi y}{b}))$, $b_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f_\lambda(x,y)sin(m(\frac{\pi x}{a}))sin(n(\frac{\pi y}{b}))dxdy \quad (0 < n)$ となる。
$\Delta f_\lambda = -\lambda f_\lambda$ と三角関数への展開の一意性を考慮すると $(m^2\frac{(\pi)^2}{a^2} + n^2\frac{(\pi)^2}{b^2})b_{m,n} = \lambda b_{m,n}$
f_λは定数０ではないので、$b_{m,n}$はすくなくとも一つ 0 でない値をとり、その時のλは $m^2\frac{\pi^2}{a^2} + n^2\frac{\pi^2}{b^2}$であり固有関数は $sin(m(\frac{\pi x}{a}))sin(n(\frac{\pi y}{b}))$ をとる。

---

*3 f に周期性 $f(-\pi) = f(\pi)$ は仮定しない、より正確に言えば、周期性のない関数とは、不連続な周期関数であり、たまたま端点で不連続な点があると考えることができる。

*4 この収束は $L^2(\Omega)$ の意味である。各点収束に関しては f の連続点で成立し、不連続点 x_0では、その $lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ と $lim_{x \searrow x_0} f(x)$ の中点と等しくなる。（つまり、非周期関数では、その両端の関数値の中点とフーリエ展開の値が等しくなる)[4]^{62p}

*5 $f \in L^2(\alpha,\beta)$ とし x、$\in [\alpha,\beta] \to \hat{x} \in [-\pi.\pi]$ へ移す１次変換（これを $\hat{x}(x)$ 及びその逆関数を $x(\hat{x})$ と書く）を用いて変数変換すると

$$f(x) = f(x(\hat{x}(x)))) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\hat{x}) + b_n sin(n\hat{x}) \tag{3}$$

$$ここで\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x(\hat{x}))cos(n\hat{x})d\hat{x} \quad (0 \geq n), b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x(\hat{x}))sin(n\hat{x})d\hat{x} \quad (0 < n) \tag{4}$$

$d\hat{x} = \frac{d\hat{x}}{dx}dx = \frac{2\pi}{\beta-\alpha}dx$ に注意すると

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} f(x(\hat{x}(x)))cos(n\hat{x}(x))\frac{2\pi}{\beta-\alpha}dx \quad (0 \geq n), b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} f(x(\hat{x}(x)))sin(n\hat{x}(x))\frac{2\pi}{\beta-\alpha}dx \quad (0 < n) \tag{5}$$

ここで、具体的に $\hat{x} = \frac{\pi(2x-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}$ で与えるとよい。

2.2 超関数の意味での微分（広義の微分)

まず一次元の場合を考える。定義域Ω=(-1,1) として、f をΩ上の実関数とする。f を (-1,0)、(0,1) では微分可能であるとし、原点では連続であるが微分可能である必要はないとする。(例えば $f(x) = |x|$) このとき区間 (-1,1) では、f は超関数の意味では微分可能であり、その微分値は (-1,0)∪(0,1) 上では f の微分値と等しく原点での値は何をとってもよい。この関数をあとで使うので、便宜上ここでは $\hat{f}$ と置くことにする。なぜこのようなことになるかというと超関数の意味での微分とは、微分をある意味、積分（部分積分）で表現しているので、定義域上の測度 0 (面積が無視できる) の集合上でなにが起こっているかは問題にならないことによる。以下、定義を与える。関数 $f \in L^2(\Omega)$ の超関数の意味での微分は次の条件をみたす g のことである。(g を $L^2(\Omega)$ に属すとか関数だとかに制限せずに書いていることに注意)
$\int_\Omega (f\ \phi')dx = -\int_\Omega (g\ \phi)dx\ \forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$: { Ω上の無限回微分（通常の意味）可能関数で $\overline{\{x; \phi\ (x) \neq 0\}}$ [*6] がΩに含まれる }
上で与えた $\hat{f}$ が上の条件をみたすことを確かめる。$\int_\Omega (f\ \phi')dx = \int_{-1}^0 (f\ \phi')dx + \int_0^1 (f\ \phi')dx = -\int_{-1}^0 (f'\phi)dx + [f\ \phi]_{-1}^{0^-} - \int_0^1 (f'\phi)dx + [f\ \phi]_{0^+}^1$ ここで $f(0-) = \lim_{x\nearrow 0} f(x)$、$f(0+) = \lim_{x\searrow 0} f(x)$ 今 f が 0 で連続なので両者は等しい。および φ は $\partial\Omega$ 上で 0 であることを考えると $\int_\Omega (f\ \phi')dx = \int_{-1}^0 (f\ \phi')dx + \int_0^1 (f\ \phi')dx = -\int_{-1}^0 (f'\phi)dx - \int_0^1 (f'\phi)dx = -\int_\Omega (\hat{f}\phi)$ となり $\hat{f}$は f の超関数としての微分の条件をみたす。ここで、f が原点で連続でないときにはディラックの δ 関数 [*7] が g に含まれることになる。(従って g はこのとき通常の意味での関数ですらない)
以下の議論では実はこの超関数としての微分が $L^2(\Omega)$ に属するという空間（ソボレフ空間 $W^{1,2}$）内で議論することになる。つまり微分に δ 関数が現れる場合は議論の対象にしない[*8]。

Ωが多次元の場合、一次元と同じだが部分積分の代わりにガウス・グリーンの定理を用いる。つまり、$\vec{g}$ が関数 f の超関数の意味での ∇f であるとは、$\int_\Omega (f\ \nabla\cdot\vec{\phi})dx = -\int_\Omega (\vec{g}\ \cdot\vec{\phi})dx$ 、$\forall\ \phi_i \in C_0^\infty(\Omega)$、$\vec{\phi} = (\phi_i)$ をみたすことである。この場合も一次元と同じように $\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2$ 及び $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Phi$（空集合）$\gamma \equiv$ [*9] $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ とし、f は γ 上で連続で Ω_1、Ω_2上でそれぞれ通常の意味で微分可能であるとする。一次元と同じように$\vec{g}$をΩ_1、Ω_2上では ∇f と等しく、γ 上では任意の有限値をとる関数とする。このとき$\vec{g}$は超関数の意味での∇ f である。このことは各 Ω_i 上では $\vec{g}$ は微分可能なので、その領域上でガウスの定理が使える。f が連続であること、および φ が $\partial\Omega$ 上で 0 であること、および境界 γ 上のΩ_1、Ω_2での法線ベクトルが逆方向であることを考えると、$\int_{\partial\Omega_1} (f\vec{\phi}\cdot n)dx + \int_{\partial\Omega_2} (f\vec{\phi}\cdot n)dx = 0$ が成り立つ。従って、
$\int_\Omega (f\nabla\cdot\vec{\phi})dx = \int_{\Omega_1} (f\nabla\cdot\vec{\phi})dx + \int_{\Omega_2} (f\nabla\cdot\vec{\phi})dx = \int_{\Omega_1} (\nabla\cdot(f\vec{\phi}))dx - \int_{\Omega_1} (\nabla f\cdot\vec{\phi})dx + \int_{\Omega_2} (\nabla\cdot(f\vec{\phi}))dx - \int_{\Omega_2} (\nabla f\cdot\vec{\phi})dx = \int_{\partial\Omega_1} (f\vec{\phi}\cdot n)dx + \int_{\partial\Omega_2} (f\vec{\phi}\cdot n)dx - \int_{\Omega_1} (\nabla f\cdot\vec{\phi})dx - \int_{\Omega_2} (\nabla f\cdot\vec{\phi})dx = -\int_{\Omega_1} (\vec{g}\cdot\vec{\phi})dx - \int_{\Omega_2} (\vec{g}\cdot\vec{\phi})dx = -\int_\Omega (\vec{g}\cdot\vec{\phi})$ つまり$\vec{g}$は超関数としての ∇f の条件を満たす。

[*6] $\overline{A}$とは A とその境界を含んだ領域 ≡ A の閉包
[*7] 一点で∞、他は 0 となる関数で、積分すると 1 になる関数
[*8] δ 関数は $L^2(\Omega)$ 関数ではない。何故か・・L^2関数とすると δ 関数 = 0 がΩ上ほとんど全てで成立する。従って δ 関数のΩ上の積分は 0 となり。δ 関数の本来の定義と矛盾する。
[*9] 左辺 γ を右辺で定義するの意味

2.3 geometry

対象モデルの幾何を明確にする。次元 (n) は 2 次元または 3 次元である。Ωは有界な連結開集合で境界は

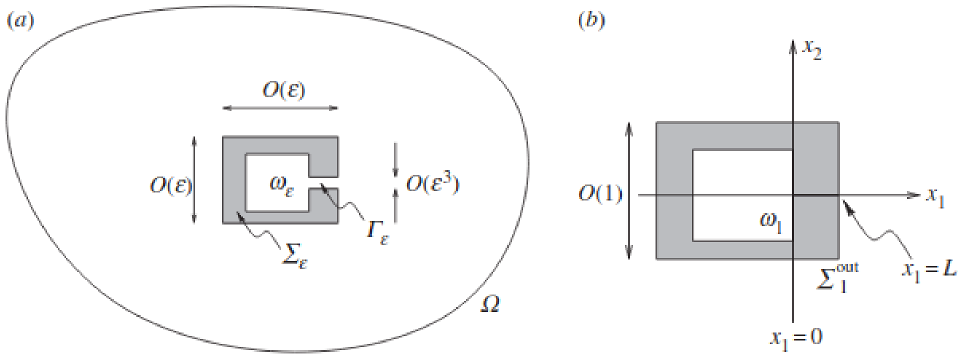

Figure 1. (a) The geometry of the Helmholtz resonator in the two-dimensional case $n = 2$. The resonator volume ω_ε has a diameter of order ε and a volume of order $V_\varepsilon \sim \varepsilon^2$ (ε^3 in dimension $n = 3$). The channel Γ_ε has a length L_ε of order ε and an opening diameter of order ε^3 (ε^2 in dimension $n = 3$). (b) The obstacle Σ_ε is constructed from $\Sigma_1^{out} \backslash \omega_1$ by scaling with ε and by removing the channel Γ_ε.

リプシッツ連続 [*10] [*11] とする。Fig1 は 2 次元の cabity の図である。(b) を ϵ縮小し、$channel\ \Gamma_\epsilon$ を追加したのが (a) である。channel と cabity との接合部分の長さが $O(\epsilon^3)$[*12] になっている。原点のとり方は、(b) に指定してある。$\Sigma_1^{out} \subset \Omega$ を方形とし内部に cabity ω_1 を持つ。$\omega_\epsilon = \omega_1$の$\epsilon$縮小、$\Sigma_\epsilon^{out} = \Sigma_1^{out}$の$\epsilon$縮小、$\Sigma_\epsilon = \Sigma_\epsilon^{out} - \omega_\epsilon - \Gamma_\epsilon$、$\Omega_\epsilon = \Omega - \Sigma_\epsilon = \omega_\epsilon \cup \Gamma_\epsilon \cup \Omega_\epsilon^{out}$、$\Omega_\epsilon^{out} = \Omega - \Sigma_\epsilon^{out}$とそれぞれ定義する。重要な点は $\frac{L_ε \cdot V_ε}{A_ε}$を ε $-free($ ε $-nondimension)$[*13] とすることである。
ヘルムホルツ共鳴器の geometry と言うときには、この定義をふくめて、Ω_ϵ で表すことにする。

2.4 リースの表現定理、ソボレフ空間、斉次ポアソン方程式の解の存在と一意性

まず。基本となるリースの表現定理について説明する。H を可分 (separable) な [*14] ヒルベルト空間とする。T を H 上の線形、有界な実汎関数とする。このとき H に唯一 $f_T \in H$ が存在し、$T(g) = (f_T, g)$ が成立する。証明は次のようにする。$\{f_n\}$ を正規な H の直交基底にとる。このとき $f_T = \sum_n T(f_n) f_n$ と置くとよい。$\sum_{n=1}^{\infty} (T(f_n))^2 < \infty$ であることは次のようにしてわかる。a_iを $T(f_i)$ とおく b_nを $\{\sum_{i=1}^n (a_i)^2\}^{\frac{1}{2}}$ とする。f_iの正規性から $\|\sum_{i=1}^n a_i f_i\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 = b_n^2$に注意すると $b_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_n} a_i = T(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_n} f_i) \leq \|T\| \|\frac{\sum_{i=1}^n a_i f_i}{b_n}\| = \|T\|$ つまり、$\sum_{i=1}^n (T(f_i))^2 \leq \|T\|^2 (\forall n > 0)$。
またこのとき、$(f_T, g) = \sum_n T(f_n)(f_n, g) = T(\sum_n (f_n, g) f_n) = T(g)$、$f_T$の一意性は、明らかである。[*15]

[*10] [1] にはそう書いてあるが、境界のある程度の滑らかさを必要とするかもしれない。

[*11] 局所的にその勾配$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x-y|}$が有界であること。微分可能性は仮定しないが、結果として殆ど全ての点で微分可能性がでる。

[*12] 3 次元の場合は接合部分の直径が $O(\epsilon^2)$

[*13] こういう言い方があるわけではない。n =2 の場合ではチャネルの開口の直径の大きさを $O($ ε ^ 3)、$n = 3$ の場合では $O($ ε $^2)$ にとらなければばいけない理由はそこにある

[*14] 結果として、可算個の正規直交基底がとれることを意味する

[*15] この証明はあまり見かけない、一応抜けはなさそうだけれどもしかするとバグがあるかもしれない。

この単純な定理が実は非常に強力な結果をもたらすことを示そう。
次の斉次境界ポアソン問題を解くことを考える。Ωを有界、連結な開集合で、境界はリプシッツ連続 *16 とする。このとき $\forall f \in L^2(\Omega)$ に対し、次の条件を満たす u の存在を問う。

$$\begin{aligned}
&\Delta\ u = -f \\
&\text{境界条件は、} f(x) = 0(x \in\ \Gamma_1)\text{、}\frac{\partial f}{\partial n}\{\text{ 境界上の法線方向の微分を表す }\} = 0(x \in\ \Gamma_2) \\
&\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi \quad\text{、}\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega
\end{aligned} \tag{8}$$

この書き方では解 u に 2 回までの微分可能性を要求してしまうので、次のように弱い解の存在にまで、条件を弱める。

$$\begin{aligned}
&u \in H_e^1(\Omega) \\
&\int_\Omega \nabla u \nabla\ \phi\ dx = \int_\Omega f\ \phi\ dx \quad \forall\ \phi \in H_e^1(\Omega)
\end{aligned} \tag{9}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
&H_e^1 \equiv \{f \in W^{1,2}; f(x) = 0\ \ \forall x \in\ \Gamma_1\} \\
&W^{1,2} \equiv \{f \in L^2(\Omega)\text{、かつ超関数の意味での一回偏微分可能で、}|\nabla f| \in L^2(\Omega)\}
\end{aligned} \tag{10}$$

一見 Γ_2上の ノイマン境界条件が入っていないように思うかもしれないが、u が 2 回微分可能で、$\Delta u = -f$ だとすると、ガウスの定理から、

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u \nabla\ \phi\ dx = \int_{\partial\Omega} \quad \phi \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_\Omega f\ \phi\ dx\ \forall\ \phi \in H_e^1(\Omega) \\
&\text{式 (??) および}\phi \in H_e^1(\Omega)\text{ の}\Gamma_1\text{上の境界条件から次の }\Gamma_2\text{上のノイマン条件が出てくる} \\
&\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Gamma_2} \phi \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

$W^{1,2}$は内積 $(f,g)_{H^1} = \int_\Omega fg dx + \int_\Omega \nabla f \nabla g dx$ によりヒルベルト空間をつくる。H_e^1はその閉部分空間なので同じ内積でヒルベルト空間をつくる。
ここまでで、$\forall f \in L^2(\Omega)$ に対して、$H_e^1(\Omega)$ 上の有界な線形汎関数を $\int_\Omega f\phi dx$ であたえると、リースの表現定理から $H_e^1(\Omega)$ の元が一意に決まって、(それを $T(f)$ とおく) $\int_\Omega f\phi dx = (T(f), \phi)_{H_e^1(\Omega)}$ と表現できることがわかる。この T が実は、ヘルムホルツ共鳴器の場合には有界、線形、自己随伴、正値、コンパクト作用素となることが後で示される。ヘルムホルツ共鳴器を与える Ω_ϵ の場合その geometry からポアンカレの不等式 *17が成立する。そのために H_e^1の内積を微分値のみで表現することができる。
ヘルムホルツ共鳴器の geometry を用いて、いままでの結果をまとめると、$H_e^1(\Omega)$ を $H_\epsilon(\Omega_\epsilon)$、このとき、$\Gamma_1$ は$\partial\Omega$*18、T を T_ϵとおくと

$$\begin{aligned}
&\exists_1 T_\epsilon(f) \in H_\epsilon(\Omega_\epsilon) \quad\ with \\
&\int_{\Omega_\epsilon} f\ \phi\ dx = \int_\Omega (\nabla T_\epsilon(f) \cdot \nabla\ \phi) dx\ \forall \phi \in H_\epsilon(\Omega_\epsilon)
\end{aligned} \tag{12}$$

---

*16 [1] にはそう書いてあるが、境界のある程度の滑らかさを必要とするかもしれない。
*17 $L^2(\Omega)$ の自乗ノルムがその微分値の自乗ノルムで一様に抑えられること、つまり $\|f\|_{L^2(\Omega)} \le K\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$、定数 K は f とは独立にとれる
*18 ヘルムホルツ共鳴器の *geometory* の場合$\partial\Omega$は外部境界を表す。

となり、これはヘルムホルツ共鳴器をあたえる Ω_ϵ上でポアソン方程式 (9) の解が $T_\epsilon(f)$ が一意に存在することを意味する。

2.5 入門的な教科書に出てくる範囲でわかっていること

ここでは、教科書 [3]8 章にそって正値、連続な自己随伴（共役)、コンパクト作用素の固有値問題についての結果を示し、それが、問題にしているヘルムホルツ共鳴器上のグリーン作用素 $(H_\epsilon(\Omega_\epsilon), T_\epsilon)$ に適応できることを示す。

2.5.1 ヒルベルト空間および、弱収束、強収束と関連する諸定理

ヒルベルト空間とは、数学的にいってしまうと、内積が定義されており、内積から導かれるノルム $\|f\|$[*19] により、完備なノルム空間をなすもの。となる。また、H の元の列 f_nが f_0に強収束するとは、$lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\| = 0$ となること。このときに f_0 が H に含まれるかを考えてみる。H がヒルベルト空間であることを忘れて、例えば、開区間 (a,a+1) だとすると、$f_n = a + \frac{1}{n}$は $f_0 = a$ に収束するが、a は H には含まれない。これを $H = [a, 1]$ とすると、H 内の任意の収束する列の極限（収束値）は、H 内に含まれる。この性質を持つときに、H は与えられたノルムで閉じている（完備である）という言い方をする。
繰り返すと、H がヒルベルト空間であるとは、内積が定義された関数空間で、内積により定義できるノルムに関して閉じている空間のことである。特に、可算個の基底を持つときに、可分なヒルベルト空間といい、この文章全体でヒルベルト空間とは、全て可分な実 [*20] ヒルベルト空間を扱う。さらに、f_nが f に弱収束するとは、$lim_{n\to\infty}(f_n, \phi) = (f, \phi)$、$\forall\phi \in H$ が成立することである。一連の次の性質（命題）が成立する。数値は証明の難易度をあらわす。１定義の翻訳、２容易、３明らかではないが、考えるとわかる。４簡単そうで、実はむづかしい。５大変むづかしい。

$$\text{ヒルベルト空間内の強収束する無限列は弱収束する。}1 \tag{13}$$

$$\text{ヒルベルト空間内の弱収束する無限列は有界である。}4 \tag{14}$$

逆に

$$\text{ヒルベルト空間内の有界な無限列空間内の元に弱収束する部分列が存在する。}3or4 \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\text{ヒルベルト空間内の弱収束する無限列が、必ずしも強収束するとは限らない。}1 \\ \text{例えば } \{\phi_n\} \text{ を基底にとれば、０に弱収束することがわかる。}\end{gathered} \tag{16}$$

$$\phi_n\text{が}\phi_0\text{に強収束し、}\psi_n\text{が}\psi_0\text{に弱収束すれば、}(\phi_n, \psi_n) \text{ は } (\phi_0, \psi_0) \text{ に収束する。}2 \tag{17}$$

$$\phi_n\text{が}\phi_0\text{に弱収束するとき、}\|\phi_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\phi_n\|\text{。}2 \tag{18}$$

$$\phi_n\text{が}\phi_0\text{に弱収束し、}\lim_{n\to\infty} \|\phi_n\| = \|\phi_0\| \text{ ならば}\phi_n\text{が}\phi_0\text{に強収束する。}2 \tag{19}$$

2.5.2 有界、正値、自己随伴、コンパクト線形作用素の固有値問題

まず、言葉の定義から。ヒルベルト空間上の線形作用素 $\mathrm{T} : H \to H$ が
・有界であるとは、$\sup_{f\in H} \frac{\|T(f)\|}{\|f\|} \equiv \|T\|$[*21] $< \infty$ であること。有界であることと、連続であることは同値。

[*19] $\|f\| = (f, f)\frac{1}{2}$のこと
[*20] スカラーとして、実数をとる
[*21] T のノルムという

・正値であるとは、$(T(f),f)\ \geq 0\ \forall f\in H$。であること
・コンパクト作用素であるとは、T が弱収束する列を強収束する列へ移すこと。
・自己随伴（共役）作用素であるとは、(Tf,g)=(f,Tg) $\forall f,g\in H$ が成立すること。(つまり、行列のことばで言えば、エルミート [*22])。
このとき次のことが成立する。

$$T\text{ の固有空間の次元は有限である。} \tag{20}$$

(∵) 対応する独立した固有関が数無限個あるとしよう、固有値λの単位[*23]直交固有ベクトルを $\{f_n\}$ とする。その弱収束列が存在する (性質 15) ことが、わかっているので、それを改めて $\{f_n\}$ とおくことにする。従って、T のコンパクト性から $\{T(f_n)\}=\{\lambda f_n\}$ は強収束する。
つまるところ、$\{f_n\}$ は強収束するので、それは、収束列でないといけない。しかし、$\{f_n\}$ は直交しているので、$|f_n-f_m|^2=2(n\neq m)$ となり、そのようにとることはできない。
同様に、次のことが示される。

$$T\text{ の固有値の集積点は 0 以外にない。} \tag{21}$$

(∵)$\{\lambda_n\}$ を$\lambda\neq 0$ へ集積する固有値列とする。その単位、直交する固有ベクトルを $\{f_n\}$ とする。上と同じ議論で、$\{T(f_n)\}=\{\lambda_n f_n\}$ は強収束するように取り直せるので、
$\{\lambda_n f_n\}$ は収束列でないといけない。しかし、$\{f_n\}$ は直交しているので、$|\lambda_n f_n-\lambda_m f_m|^2=\lambda_n^2+\lambda_m^2(n\neq m)$ となり、そのようにとるためには,$\lambda_n\to 0$ でないといけない。
さて、次の重要な結果が導かれる。

Th. 1. T は有界、正値、自己随伴、コンパクト作用素とする。このとき、T は *0* に収束する正の固有値列 $\{\lambda_n\}$ と対応する固有関数 $\{f_n\}$ がとれて。

$$\exists\lambda_0\geq\lambda_1\geq ...\geq\lambda_n\geq ... \qquad lim_{n\to\infty}\lambda_n=0 \tag{22}$$

および、λ_nの対応する固有関数を f_nとすると、

$$g\in H\text{ に対して、}T(g)=\sum_{n=0}^{\infty}\quad\lambda_n(g,f_n)f_n\text{と表現できる。} \tag{23}$$

証明は一連の補題から導かれる。まず、次の補題を示す。

Lemma. 1. T が自己随伴作用素のとき、$\|T\|=sup_{\phi\in H}\frac{(T\phi,\phi)}{\|\phi\|^2}$ が成立する。

Proof. $|(T\phi,\phi)|\leq\|T\phi\|\|\phi\|\leq\|T\|\|\phi\|^2$ 故、$sup_{\phi\in H}\frac{(T\phi,\phi)}{\|\phi\|^2}\leq\|T\|$
逆は、$M\equiv sup_{\phi\in H}\frac{(T\phi,\phi)}{\|\phi\|^2}$とおき、$\forall\phi,\psi\in H$ に対して、$(T\phi+T\psi,\phi+\psi)-(T\phi-T\psi,\phi-\psi)=4(T\phi,\psi)$ および、$(T\phi+T\psi,\phi+\psi)\leq M\|\phi+\psi\|^2$、$(T\phi-T\psi,\phi-\psi)\leq M\|\phi-\psi\|^2$ を考えると、$4|(T\phi,\psi)|\leq M\{\|\phi+\psi\|^2+\|\phi-\psi\|^2\}$ $=2M\{\|\phi|^2+\|\psi\|^2\}$ ここで、$\psi=\alpha T\phi$、$\alpha>0$ とおくと、$2\alpha\|T\phi\|^2\leq M\{\|\phi\|^2+\alpha^2\|T\phi\|^2\}$、さらに、$\alpha=\frac{\|\phi\|}{\|T\phi\|}$ とすると、$\frac{\|T\phi\|}{\|\phi\|}\leq M$ が成立する。

□

[*22] 実数の範囲でいえば、対称行列
[*23] ノルムが 1 であること

次に

Lemma. 2. $\lambda = \|T\|$ に対応する固有値と固有関数が存在する。

Proof. 上の補題から、$lim_{n\to\infty}|(T\phi_n, \phi_n)| = \|T\|$ かつ $\|\phi_n\| = 1$ となる列 $\{\phi_n\}$ を H から取ることができる。性質 [15] から、弱収束する部分列を再び、インデックスをとりなおして、$\{\phi_n\}$ とし、その収束値をϕ_0とする。T のコンパクト性から $\{T\phi_n\}$ は、H 内で Tϕ_0に 強収束する。このとき 性質 [17] から、$(T\phi_n, \phi_n)$ は、$(T\phi_0, \phi_0)$ へ収束する。従って、$(T\phi_0, \phi_0) = \|T\|$ である。この時弱収束の性質 [18] より、$\|\phi_0\| \leq 1$ である。一方、$(T\phi_0, \phi_0) \leq \|T\|\|\phi_0\|^2$故、$\|\phi_0\| \geq 1$、即ち $\|\phi_0\| = 1$ である。
この ϕ_0が固有値$\lambda = \|T\|$ の固有関数であることは次のようにしてわかる。
まず、$\frac{(T\phi_0+t\omega, \phi_0+t\omega)}{\|\phi_0+t\omega\|^2}$ の極大性から、
$\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{(T(\phi_0+t\omega), \phi_0+t\omega)}{\|\phi_0+t\omega\|^2}\}|_{t=0} = 0\ \forall\omega \in H$
左辺を計算し、$\|\phi_0\| = 1$、$t = 0$ を代入すると、$(T\phi_0, \omega) - (T\phi_0, \phi_0)(\phi_0, \omega) = 0\ \forall\omega \in H$ 従って、$T\phi_0 = (T\phi_0, \phi_0)\phi_0$ つまり、$T\phi_0 = \|T\|\phi_0$ □

Lemma. 3. Tをコンパクト、有界、自己随伴、正値作用素とし、λ、f_λ をその固有値と正規化された固有ベクトルとする。このとき、新たに $T_\lambda(g) \equiv T(g) - \lambda(g, f_\lambda)f_\lambda$ と定義すれば、T_λ は、H上のコンパクト、有界、自己随伴、正値作用素である。
また、$\lambda = \|T\|$ とするとき、$\|T_\lambda\| \leq \|T\|$ および、T_λの固有ベクトル f_μは f_λとは直交する。

Proof. コンパクト性と有界性、自己随伴であることは明らか、従って、正値であることを証明すればよい。
$(T_\lambda g, g) = (Tg, g) - \lambda(g, f_\lambda)(f_\lambda, g) = (T(g - (g, f_\lambda)f_\lambda), g) =$ [*24] $(T(g - (g, f_\lambda)f_\lambda), g - (g, f_\lambda)f_\lambda) \geq 0\ \forall g \in H$
および、$|T_\lambda(g)| = |T(g - (g, f_\lambda)f_\lambda)| \leq \|T\||g - (g, f_\lambda)f_\lambda| \leq$ [*25] $\|T\||g|$ 最後に、$(T_\lambda f_\mu, f_\lambda) = (T(f_\mu) - \lambda(f_\lambda, f_\mu)f_\lambda, f_\lambda) = (T(f_\mu - (f_\lambda, f_\mu)f_\lambda), f_\lambda) = (f_\mu - (f_\lambda, f_\mu)f_\lambda, Tf_\lambda) = \lambda(f_\mu - (f_\lambda, f_\mu)f_\lambda, f_\lambda) = 0$ ゆえ $T_\lambda f_\mu$ と f_λつまり、f_μと f_λは直交する。 □

定理の証明をする。

Proof. まず、補題 2 および 3 を組み合わせて、性質 20 および 21 を組み合わせると、次のことがわかる。$\exists\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq, ..., \geq \lambda_n\}$ および互いに直交する単位固有ベクトル $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, ..., f_{\lambda_n}$がとれて、$g \in H \to T(g) - (\sum_{i=1}^n (f_{\lambda_i}, g)f_{\lambda_i})f_{\lambda_i}$ が、正値、コンパクト、自己随伴、有界作用素になる。この作用素を T_nとすると $\|T_n\| \leq \lambda_n$が補題 3からわかっている。さらに性質 21からλ_nは 0 に収束する。つまり、$|T(g) - (\sum_{i=1}^n (f_{\lambda_i}, g)f_{\lambda_i})f_{\lambda_i}| \leq \|Tn\||g| \leq \lambda_n|g| \to 0$ となり、定理が証明された。 □

2.5.3 ヘルムホルツ共鳴器を与える $geometry\ \Omega_\epsilon$に対して、$L^2(\Omega_\epsilon)$ 上のグリーン作用素 T は正値、連続（有界）、自己随伴、コンパクト作用素である。

$L^2(\Omega_\epsilon)$ 上のグリーン作用素 T は次のように定義された。$\forall f \in L^2(\Omega_\epsilon)\ (f, u)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (Tf, u)_{H_\epsilon} \equiv (\nabla Tf, \nabla u)_{L^2(\Omega_\epsilon)}\ \forall u \in H_\epsilon(\Omega_\epsilon)$[*26] この条件から T が線形、有界、正値、自己随伴、そしてコンパクトな $L^2(\Omega_\epsilon)$ 上の作用素[*27]であることを示す。

[*24] $(T(g - (g, f_\lambda)f_\lambda), f_\lambda) = (g - (g, f_\lambda)f_\lambda), Tf_\lambda) = \lambda(g - (g, f_\lambda)f_\lambda, f_\lambda) = 0$
[*25] $|g - (g, f_\lambda)f_\lambda|^2 = |g|^2 - |(g, f_\lambda)|^2$
[*26] H_ϵは境界条件$\partial\Omega\{\Omega$はΩ_ϵの外部領域 $\}$ 上でディリクレ条件をみたす $W^{1,2}$に属す関数の全体であった。
[*27] 値域は $H_\epsilon(\Omega_\epsilon)$ に属すが

- T は線形である。
  ($\because$) $(T(f+g),u)_{H_e(\Omega_\epsilon)} = (f+g,u)_{L^2(\Omega_\epsilon)}$=$(f,u)_{L^2(\Omega_\epsilon)} + (g,u)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (Tf,u)_{H_e(\Omega_\epsilon)} + (Tg,u)_{H_e(\Omega_\epsilon)} = (Tf+Tg,u)_{H_e(\Omega_\epsilon)}$ $\forall u \in H_\epsilon(\Omega_\epsilon) \Rightarrow T(f+g) = Tf + Tg$
- T は有界である。
  $(\because)(f,Tf)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (\nabla Tf, \nabla Tf)_{L^2(\Omega_\epsilon)} \geq \exists K(Tf,Tf)_{L^2(\Omega_\epsilon)} \Rightarrow$
  $|Tf|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq \frac{1}{K}|f|_{L^2(\Omega_\epsilon)}$
- T は正値である。
  $(\because)(Tf,f)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (f,Tf)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (\nabla Tf, \nabla Tf)_{L^2(\Omega_\epsilon)} \geq 0$
- T は自己随伴である。
  $(\because)(Tf,g)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (g,Tf)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (\nabla Tg, \nabla Tf)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (\nabla Tf, \nabla Tg)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (f,Tg)_{L^2(\Omega_\epsilon)}$
- T はコンパクトである。
  $(\because)\{f_n\}$ を $L^2(\Omega_\epsilon)$ で f_0への弱収束する列とする。 つまり、$\forall u \in H_\epsilon(\Omega_\epsilon) \subset L^2(\Omega_\epsilon)$ 、$\lim_{n\to\infty}(f_n,u)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = (f_0,u)_{L^2(\Omega_\epsilon)}$ このことは、$\lim_{n\to\infty}(Tf_n,u)_{H_\epsilon(\Omega_\epsilon)} = (Tf_0,u)_{H_\epsilon(\Omega_\epsilon)}$ 、即ち、Tf_nが Tf_0へ $H_\epsilon(\Omega_\epsilon)$ で弱収束することを意味する。次の *Rellich* の定理*28

  Ωが有界のとき、$H^1(\Omega)$ で弱収束する列は、$L^2(\Omega)$ で強収束する。

  を用いると、Tf_nが Tf_0へ強収束することがわかる。*29

3 論文 [1] の内容

3.1 Main Theorem

$\{\Omega_\epsilon$、$T_\epsilon\}$ を各ヘルムホルツ共鳴器を与える geometry [2.3]、および、前節で与えたグリーン作用素 [2.5.3] の列 $(\epsilon \to 0)$ とする。V_ϵは *cabity* ω_ϵの体積、A_ϵは *channel* 開口の面積、L_ϵは *channel* 長であり、$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{V_\epsilon L_\epsilon}{A_\epsilon} = \frac{VL}{A}$であるようにとる。次の仮定 (24) のもと、各 T_ϵは、0 に収束する正の固有値 $\mu_\epsilon > \lambda_{\epsilon_1} \geq \lambda_{\epsilon_2} \geq \dots$ $\lim_{n\to\infty}\lambda_{\epsilon_n} = 0$ を持ち、これらの固有値の極限は $\lim_{\epsilon\to 0}\mu_\epsilon = \frac{VL}{A}$、および $\lim_{\epsilon\to 0}\lambda_{\epsilon_i} = \lambda_i$ となる。ここで、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$ は Ω*30上の歳次ディリキュレ境界上のグリーン作用素 $T_*(\equiv -\Delta^{-1})$ の固有値であり、各λ_{ϵ_i}はλ_iに重複度を込めて収束する。

$$\text{仮定}: \frac{VL}{A} > \lambda_1 \tag{24}$$

証明の概略

ヘルムホルツ共鳴器をよびその上のグリーン作用素の性質 (2.5.3)、および式 (22) から、各 T_ϵは 0 に収束する正の固有値列を持ち、またサブセクション (3.2)、(3.5) およびサブセクション (3.6) から次のことがわかる。T_ϵは、0 に収束する正の固有値 $\mu_\epsilon > \lambda_{\epsilon_1} \geq \lambda_{\epsilon_2} \geq \dots$ $\lim_{n\to\infty}\lambda_{\epsilon_n} = 0$ を持ち、最大固有値 μ_ϵ は simple（固有空間の次元は 1 次元）で、その極限は $\lim_{\epsilon\to 0}\mu_\epsilon = \frac{VL}{A}$ となる。従って、残りは $\lim_{\epsilon\to 0}\lambda_{\epsilon_i} = \lambda_i$ の部分で

*28 [3] 191p 補題 8.3、[7]167p Theorem 7.22.

*29 H_ϵでの弱収束列 $\{Tf_n\}$ は H^1で有界になる従って弱収束する部分列がとれるので、Tf_nは $L^2(\Omega_\epsilon)$ で強収束する部分列がとれる。このときの収束値が同じ値にとれることが、次のようにしてわかる。Tf_{n_ν}を H_ϵの元 g に強収束したとする。u を H_ϵの元だとして、性質 (13} の f_0への弱収束性から、$(g,u) = (f_0, T^*u) = (Tf_0, u)$ $\forall u \in H_\epsilon$ 従って、$g = Tf_0$でないといけない。このすべての部分列に対して同じことがいえるので、結局 Tf_nは $L^2(\Omega_\epsilon)$ で Tf_0に強収束する。

*30 $\omega_\epsilon \subset \Sigma_\epsilon^{out} = \Phi$

ある。これは、T_*の固有値λ_iに対応する固有関数 f_iをΩ_ϵに制限し、つまり $f_i^\epsilon = f_i|\Omega_\epsilon$とおいたときに f_i^ϵが T_ϵ の漸近的固有関数族[*31]をなすことから導かれる。

3.2 $\mu_\epsilon = \|T_\epsilon\| \geq \frac{L_\epsilon V_\epsilon}{A_\epsilon}$

Proof. $H_\epsilon(\Omega_\epsilon) \equiv \{f \in W^{1,2}(\Omega_\epsilon); f|_{\partial\Omega} = 0\}$

$$f_\epsilon \equiv \begin{cases} 1 & x \in \omega_\epsilon \\ 0 & x \in \Omega_\epsilon \setminus \omega_\epsilon \end{cases}$$

明らかに、$f_\epsilon \in L^2(\Omega_\epsilon)$ 従って $L^2(\Omega_\epsilon)$ 上のグリーン作用素 T_ϵを用いて、$T_\epsilon(f_\epsilon) \in H_\epsilon$ が定義できて、試験関数

$$\chi_\epsilon \equiv \begin{cases} 1 & x \in \omega_\epsilon \\ 1 - \frac{x_1}{L_\epsilon} & x \in \Gamma_\epsilon \\ 0 & x \in \Omega_\epsilon^{out} \end{cases}$$

とおくと、これは滑らかな境界上で連続他は微分可能な Ω_ϵ 上の関数なので、$H_\epsilon(\Omega_\epsilon)$ に属す。従って、

$$\int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon \chi_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla(T_\epsilon f_\epsilon) \cdot \nabla \chi_\epsilon \tag{25}$$

値を代入すると、

$$V_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon \chi_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla(T_\epsilon f_\epsilon) \nabla \chi_\epsilon = -\frac{1}{L_\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} \partial_{x_1} T_\epsilon f_\epsilon \tag{26}$$

ところで、

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_\epsilon} T_\epsilon f_\epsilon \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon (T_\epsilon f_\epsilon) \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla(T_\epsilon f_\epsilon) \nabla(T_\epsilon f_\epsilon) \\ &\geq \int_{\Gamma_\epsilon} (\partial_{x_1} T_\epsilon f_\epsilon)^2 \\ &\geq \frac{1}{|\Gamma_\epsilon|} \int_{\Gamma_\epsilon} (\partial_{x_1} T_\epsilon f_\epsilon)|^2 \Leftarrow \text{シュワルツの不等式} \\ &= \frac{V_\epsilon^2 L_\epsilon^2}{|\Gamma_\epsilon|} \Leftarrow \text{式 (26)} \end{aligned} \tag{27}$$

$|\Gamma_\epsilon| = L_\epsilon A_\epsilon$および $\|f_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} = V_\epsilon$ なので、

$$\|T_\epsilon\| \geq \|T_\epsilon f_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} / \|f_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \geq \frac{V_\epsilon^2 L_\epsilon}{A\epsilon V\epsilon} = \frac{V_\epsilon L_\epsilon}{A_\epsilon} \tag{28}$$

□

従って、次のことが示された。

Th. 2. $\liminf_{\epsilon \to \infty} \mu_\epsilon \geq \mu_0 = \frac{VL}{A}$

[*31] ここでは、これ以上つっこまない。漸近的固有関数族の定義を含めて、文献 [[1]$Proposition 4.2$ を参照]

3.3 [1] 論文内で使用されるいくつかの (ポアンカレタイプ) 不等式

3.3.1 リースポテンシャルに関する不等式

$h_\mu(x) \equiv |x|^{n(\mu-1)}, n = dim(\Omega), x \in \Omega, 0 < \mu \leq 1$ とし、さらに $V_\mu(u)(x) \equiv \int_\Omega u(y)h_\mu(x-y)dy,\ u \in L^2(\Omega)$ と定義する。このとき、

$$\|V_\mu u\|_{L^2(\Omega)} \leq K\|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{29}$$

が成立する。ここで $K \equiv \frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu$である。$\omega_n$は n 次元の単位球の体積 $(= |\sigma_n^1{}^{*32}|/n)$

証明の概略

まず、 $V_\mu(1)(x) \leq \frac{1}{\mu}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu$ であることを示す。$|\Omega|$（Ωの体積）$= |B_R(x)^{*33}|(= R^n\omega_n)$ となる $R > 0$ を取る。$|x|$ の方向に対する対称性から、$V_\mu(1)(x) = \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} \leq \int_{B_R(x)} |x-y|^{n(\mu-1)} = \int_0^R \int_{\sigma_n^1} d\omega r^{n(\mu-1)+n-1}dr = \frac{1}{\mu}\omega_n R^{n\mu} = \frac{1}{\mu}|\Omega|^\mu\omega_n^{1-\mu}$ となる。次に、ヘルダー不等式 *34 から

$$\begin{aligned} V_\mu(u)(x) &= \int_\Omega u(y)h_\mu(x-y)dy = \int_\Omega u(y)(h_\mu(x-y))^{\frac{1}{2}}(h_\mu(x-y))^{\frac{1}{2}}dy \\ &\leq \{\int_\Omega u(y)^2(h_\mu(x-y))dy\}^{\frac{1}{2}}\{\int_\Omega h_\mu(x-y)dy\}^{\frac{1}{2}} \leq K^{\frac{1}{2}}\{\int_\Omega u(y)^2(h_\mu(x-y))dy\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{30}$$

従って、

$$\int_\Omega V_\mu(u)^2dx \leq K\int_\Omega\{\int_\Omega u(y)^2(h_\mu(x-y))dy\}dx = K\int_\Omega\{\int_\Omega u(y)^2(h_\mu(x-y))dx\}dy \leq K^2\int_\Omega u(y)^2dy \tag{31}$$

つまり、結果 $\|V_\mu u\|_{L^2(\Omega)} \leq K\|u\|_{L^2(\Omega)}$ を得る。

3.3.2 $x \sim S$ での不等式

$x \sim S$ とは $\forall y \in S \subset \Omega$と $x \in \Omega$が (Ω内で) 直線で結ばれること。このとき次が成立する。

$$\begin{gathered} |u(x) - \fint_S u| = |\fint_S (u(x)-u(y))dy| \leq \frac{1}{|S|}\frac{d^n}{n}\int_\Omega |\nabla u(y)||x-y|^{1-n}dy \\ \text{ここで } S \subset B_d(0) \equiv \{x; |x| < d\}, n \equiv dim(\Omega) = dim(S) \end{gathered} \tag{32}$$

証明の概略

$u(x) - u(y) = \int_0^{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial t}(x + t\frac{y-x}{|y-x|})dt \leq \int_0^\infty |\nabla u(x+t\omega)|dt$

ここで、$\nabla u(x) = 0\ x \notin \Omega$として、$\nabla u$ をΩ外に拡張している。また、$\frac{y-x}{|y-x|} = \omega \in \sigma_n^1$(単位 n 次球面) と置いている。

$$\fint_S |u(x)-u(y)| \leq \frac{1}{|S|}\int_S\int_0^\infty |\nabla u(x+t\omega)|dtdy \leq \frac{1}{|S|}\int_0^d r^{n-1}dr\int_{\sigma_n^1}\int_0^\infty |\nabla u(x+t\omega)|d\omega dt \tag{33}$$

$$= \frac{d^n}{n|S|}\int_{R^n} |\nabla u(x+y)||y|^{1-n}dy = \frac{d^n}{n|S|}\int_{R^n} |\nabla u(y)||y-x|^{1-n}dy = \frac{d^n}{n|S|}\int_\Omega |\nabla u(y)||x-y|^{1-n}dy \tag{34}$$

となり、式 (32) を得る。

---

*32 n 次元単位球面

*33 x を中心とし半径 R の (n 次) 球体

*34 L^2空間の内積と L^p、L^q ノルム間の不等式、$(a,b)_{L_2} \leq \|a\|_{L_p}\|b\|_{L_q}$ p,q は$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \geq 1, q \geq 1$ をみたす。特に $p = q = 2$ のときはシュワルツの不等式と言うが、ここではすべてヘルダー不等式ということにする。

3.3.3　$x \sim S$ でのポアンカレ不等式

式 (29) に$\mu = \frac{1}{n}$、$u = |\nabla u|$ とおくと、$V_{\frac{1}{n}}(|\nabla u|)(x) \equiv \int_\Omega |\nabla u(y)||x-y|^{1-n}dy$ なので、

$$\int_\Omega \{\int_\Omega |\nabla u(y)||x-y|^{1-n}dy\}^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \le K\{\int_\Omega |\nabla u|^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{35}$$

この式と式 (32) から次が成立する。

$$\{\int_\Omega |u(x) - \fint_S u|^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{|S|}\frac{d^n}{n}K\{\int_\Omega |\nabla u|^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

3.3.4　回転 A_θに対するポアンカレの不等式

$C \subset B_R(0), A_\theta$を$\theta$をパラメータとして持つ原点を回転中心とした回転（同一回転軸を持つ回転族を考えて）とする。このとき次が成立する。

$$|\int_C (f(A_\theta(y)) - f(y))dy| \le K\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}、K = 2\pi(\frac{R^{n+2}}{n+2}|\sigma_1^n|)^{\frac{1}{2}} \tag{37}$$

証明の概略

$|\frac{\partial A_\tau}{\partial \tau}(y)| = |y|$ と、ヘルダー不等式から、

左辺$=| \int_C \int_0^\theta \frac{\partial f}{\partial \tau}(A_\tau(y))d\tau dy| = | \int_C \int_0^\theta \nabla f \cdot \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau}(A_\tau(y))d\tau dy|$

$\le | \int_C \int_0^\theta |\nabla f(A_\tau(y))|^2 d\tau dy|^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_C \int_0^\theta |y|^2 dy)^{\frac{1}{2}}$

$\le \{\int_0^\theta \int_0^R \int_{\sigma_n^1} |\nabla f(rA_\tau(\omega))|^2 r^{n-1} d\omega dr d\tau\}^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_{B_R(0)} \theta|y|^2 dy)^{\frac{1}{2}}$

$\le \{2\pi \int_0^R \int_{\sigma_n^1} |\nabla f((r\omega))|^2 r^{n-1} d\omega dr\}^{\frac{1}{2}} \cdot (2\pi| \int_0^R r^2 r^{n-1} dr |\sigma_n^1|)^{\frac{1}{2}} \le 2\pi(\frac{R^{n+2}}{n+2}|\sigma_n^1|)^{\frac{1}{2}}\{\int_\Omega |\nabla f((y))|^2 dy\}^{\frac{1}{2}}$

3.3.5　[1] で使用される特殊なポアンカレ不等式（その１）

$\forall B_{2R}(0) \subset \Omega$、$\{\int_\Omega (u(x) - \fint_{B_{2R}(0)-B_R(0)} u)^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \le \exists K\{\int_\Omega |\nabla u|^2\}^{\frac{1}{2}}$、$\forall u \in H^1(\Omega)$

証明の概略

$B_{2R}(0) - B_R(0) \equiv B$ の有限分割 $\{B_i\}$ が存在して、$\forall x \in \Omega - B$ に対して、角度 $\theta_i(x)$ を $x \sim A_{\theta_i(x)}(B_i)$ となるようにとることができる。

$|B|u(x) - \int_B u = \sum_i \{|B_i|u(x) - \int_{B_i} u\} = \sum_i^m \{|B_i|u(x) - \int_{B_i} u(A_{\theta_i(x)}y)dy\} + \sum_i^m \int_{B_i}\{u(A_{\theta_i(x)}y) - u(y)\}dy$

ここで、右辺各 i に対して、まず前半の評価は

$$\begin{aligned}|B_i|u(x) - \int_{B_i} u(A_{\theta_i(x)}y)dy \le |B_i||u(x) - \fint_{B_i} u(A_{\theta_i(x)}y)dy| &= |B_i||u(x) - \fint_{A_{\theta_i(x)}B_i} u(A_{\theta_i(x)}y)|\frac{dy}{dA_{\theta_i(x)}}|d(A_{\theta_i(x)}y)| \\ &= |B_i||u(x) - \fint_{A_{\theta_i(x)}B_i} u(y)dy|\end{aligned} \tag{38}$$

なので、式 (36) から、

$$|B_i|\{\int_\Omega |u(x) - \fint_{A_{\theta_i(x)}B_i} u(y)dy|^2\}^{\frac{1}{2}} \le \exists K_i^1\{\int_\Omega |\nabla u|^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{39}$$

右辺各 i に対して、後半の評価は式 (37) から、

$$\begin{aligned}|\int_{B_i}\{u(A_{\theta_i(x)}y)-u(y)\}dy| \le \exists K_i^2\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\text{従って、}\\ \{\int_\Omega|\int_{B_i}\{u(A_{\theta_i(x)}y)-u(y)\}dy|^2dx\}^{\frac{1}{2}} \le |\ \Omega\ |K_i^2\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\end{aligned} \tag{40}$$

合わせると、$\frac{1}{|B|}\{\int_\Omega(\text{左辺})^2\}^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^m(K_i^1+K_i^2|\ \Omega\ |)\{\int_\Omega|\nabla u|^2\}^{\frac{1}{2}}$

3.3.6 [1] で使用される特殊なポアンカレ不等式 (その２)

$f_\epsilon \in H_\epsilon$とする。$B_r(0)$ は原点を中心とした、半径 r の球体、$0<\epsilon R<r<2r$ 次が成立する。

$$\int_{B_r(0)\backslash B_{\epsilon R(0)}}|f_\epsilon|^2 \le \int_{B_{2r}(0)\backslash B_r(0)}|f_\epsilon|^2 + C_2(r)\int_{B_{2r}(0)\backslash B_{\epsilon R}(0)}|\nabla f_\epsilon|^2 \tag{41}$$

3.3.7 ２次元ヘルムホルツ共鳴器上でのポアンカレ不等式

[*35] $\Omega \equiv (a_1,b_1)\times(a_2,b_2),\ \Gamma \subset b_1\times(a_2,b_2), f\in\{f|_\Gamma=0\}\cap H^1(\Omega)$ とする。このとき、$\|f\|_{L^2(\Omega)} \le \exists K\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$が成立する。

証明の概略

F_1、F_2を次のように置く

$$\begin{aligned}F_1(x_1) \equiv (\int_{a_2}^{b_2}|\frac{\partial f}{\partial x_2}|^2(x_1,x_2)dx_2)^{\frac{1}{2}}(b_2-a_2)^{\frac{1}{2}}\\ F_2(\alpha(x_2)) \equiv (\int_{a_1}^{b_1}|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\alpha(x_2))^2dx_1)^{\frac{1}{2}}(b_1-a_1)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ここで、$\alpha(x)$ は (a_2,b_2) からΓへの縮小写像とする (即ち、$|\frac{d\alpha(x)}{dx}|=|\frac{\Gamma}{b_2-a_2}|$)。このとき、ヘルダー不等式から

$$|f(x)| \le F_1(x_1)+F_2(\alpha(x_2)) \tag{43}$$

がわかる。更に、$\int_\Omega F_1F_2$にヘルダー不等式を用いて

$$\int_\Omega|f(x)|^2dx_1dx_2 \le \int_\Omega F_1^2(x_1)+\int_\Omega F_2^2(\alpha(x_2))+2\int_\Omega F_1(x_1)F_2(\alpha(x_2)) \le ((\int_\Omega F_1^2(x_1))^{\frac{1}{2}}+(\int_\Omega F_2^2(\alpha(x_2)))^{\frac{1}{2}})^2 \tag{44}$$

が成立する。F_1,F_2の値をもどすと、

$$\int_\Omega|f(x)|^2dx_1dx_2 \le \{(\int_\Omega(\frac{\partial f}{\partial x_2})^2)^{\frac{1}{2}}(b_2-a_2)+(\int_\Omega(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\alpha(x_2)))^2dx_1dx_2)^{\frac{1}{2}}(b_1-a_1)\}^2 \tag{45}$$

$\alpha(x_2)$ を x_2に変数変換して

$$(\int_\Omega|f(x)|^2dx_1dx_2)^{\frac{1}{2}} \le (b_2-a_2)(\int_\Omega(\frac{\partial f}{\partial x_2})^2)^{\frac{1}{2}}+(b_1-a_1)(\frac{b_2-a_2}{|\Gamma|})^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2)^{\frac{1}{2}} \le \exists K(\int_\Omega|\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{46}$$

となり、結果が得られた。

[*35] この節および次の節での証明が直ちにヘルムホルツ共鳴器全体でのポアンカレ不等式を証明したことになるのではない。ポアンカレの不等式の性質上、互いに交わらない（または境界のみで交わる）複数の領域それぞれでポアンカレの不等式が成立すれば、全体で成立することがわかる。つまり、ヘルムホルツ共鳴器を与える geometory を適当に分割して、それぞれで証明できればよい。ここで与えた証明はその本質的な部分の証明であると思っていただければよい。

3.3.8 ３次元ヘルムホルツ共鳴器上でのポアンカレ不等式

$\Omega \equiv (a_1, b_1) \times B_R(0)$, $\Gamma = B_d(0) \subset b_1 \times B_R(0)$, $f \in \{f|_\Gamma = 0\} \cap H^1(\Omega)$ とする。このとき、$\|f\|_{L^2(\Omega)} \le \exists K \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$が成立する。
ここで、$B_R(0)$ は n-1 次元（今は n=3 なので、２次元）の原点を中心とし、半径を R とした球体。以下 $x \in (a_1, b_1), y \in B_R(0)$ とする。
証明の概略
$\alpha : [0, R] \to [0, d]$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= r \quad (0 \le r \le \frac{d}{2}) \\ &= \frac{d}{2R-d}(r - \frac{d}{2}) + \frac{d}{2} \quad (\frac{d}{2} \le r \le R)\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}F_1、F_2\text{を次のように置く } F_1(x, \frac{y}{|y|}) &\equiv (\int_{\frac{d}{2}}^{R} |\nabla_y f(x, t\frac{y}{|y|})|^2 dt)^{\frac{1}{2}} (R - \frac{d}{2})^{\frac{1}{2}} \\ F_2(\alpha(|y|)\frac{y}{|y|}) &\equiv (\int_{a_1}^{b_1} |\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, \alpha(|y|))^2 dx)^{\frac{1}{2}} (b_1 - a_1)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{48}$$

このとき、ヘルダー不等式から

$$|f(x)| \le F_1(x, \frac{y}{|y|}) + F_2(\alpha(|y|)\frac{y}{|y|}) \tag{49}$$

がわかる。更に、$\int_\Omega F_1 F_2$にヘルダー不等式を用いて

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^2 \le \int_\Omega F_1^2(x, \frac{y}{|y|})dxdy + \int_\Omega F_2^2(\alpha(|y|\frac{y}{|y|}))dxdy + 2\int_\Omega F_1(x, \frac{y}{|y|})F_2(\alpha(|y|)\frac{y}{|y|}) \le \\ \{(\int_\Omega F_1^2(x, \frac{y}{|y|}))^{\frac{1}{2}} + (\int_\Omega F_2^2(\alpha(|y|)\frac{y}{|y|}))^{\frac{1}{2}}\}^2\end{aligned} \tag{50}$$

が成立する。F_1, F_2の値をもどすと、

$$\begin{aligned}\int_\Omega F_1^2(x, \frac{y}{|y|})dxdy &= (R - \frac{d}{2})\int_\Omega [\int_{\frac{d}{2}}^{R} |\nabla f(x, t\frac{y}{|y|})|^2 dt] dxdy \\ &= (R - \frac{d}{2})\int_{\frac{d}{2}}^{R} dt \int_{B_R(0)} \int_{a_1}^{b_1} |\nabla_y f(x, t\frac{y}{|y|})|^2 dxdy \\ &= (R - \frac{d}{2})\int_{\frac{d}{2}}^{R} dt \int_0^R r^{n-2} dr \int_{\sigma_1^{n-1}} \int_{a_1}^{b_1} |\nabla_y f(x, t\omega)|^2 dxd\omega \\ &= (R - \frac{d}{2})\frac{R^{n-1}}{n-1}\int_{\frac{d}{2}}^{R} dt \int_{\sigma_1^{n-1}} \int_{a_1}^{b_1} |\nabla_y f(x, t\omega)|^2 dxd\omega \\ &= (R - \frac{d}{2})\frac{R^{n-1}}{n-1}\int_{B_R(0) - B_{\frac{d}{2}}(0)} \int_{a_1}^{b_1} |\nabla_y f(x, y)|^2 dx \frac{1}{|y|^{n-2}} dy \\ &\le (R - \frac{d}{2})\frac{R^{n-1}}{n-1}(\frac{2}{d})^{n-2} \int_\Omega |\nabla_y f(x, y)|^2 dxdy\end{aligned} \tag{51}$$

$r \leq 2\frac{R}{d}\alpha(r)$ および $\frac{dr}{d\alpha(r)} \leq \frac{2R-d}{d}$ を考慮して、

$$\begin{aligned}\int_\Omega F_2^2 dxdy &= |a_1-b_1|^2\int_{a_1}^{b_1}dx\int_0^R[\int_{\sigma_{n-1}^1}|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\alpha(r)\omega)|^2 r^{n-2}]drd\omega \\ &= |a_1-b_1|^2\int_{a_1}^{b_1}dx\int_0^d[\int_{\sigma_{n-1}^1}|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\alpha(r)\omega)|^2 r^{n-2}]\frac{dr}{d\alpha(r)}d\alpha(r)d\omega \\ &\leq |a_1-b_1|^2\int_{a_1}^{b_1}dx\int_0^R[\int_{\sigma_{n-1}^1}|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\alpha(r)\omega)|^2(2\frac{R}{d}\alpha(r))^{n-2}]\frac{2R-d}{d}d\alpha(r)d\omega \\ &\leq |a_1-b_1|^2(2\frac{R}{d})^{n-1}\int_\Omega|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)|^2]dxdy\end{aligned} \tag{52}$$

式 (50) の平方根に上の値を代入する。

$$\begin{aligned}\{\int_\Omega|f(x)|^2\}^{\frac{1}{2}} &\leq (\int_\Omega F_1^2(x,\frac{y}{|y|}))^{\frac{1}{2}} + (\int_\Omega F_2^2(\alpha(|y|)\frac{y}{|y|}))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \{(R-\frac{d}{2})\frac{R^{n-1}}{n-1}(\frac{2}{d})^{n-2}\}^{\frac{1}{2}}\{\int_\Omega|\nabla_y f(x,y)|^2dxdy\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ |a_1-b_1|(2\frac{R}{d})^{\frac{n-1}{2}}\{\int_\Omega|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)|^2]dxdy\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{53}$$

従って、

$$(\int_\Omega|f(x)|^2dx_1dx_2)^{\frac{1}{2}} \leq \exists K(\int_\Omega|\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{54}$$

$K \equiv \{(R-\frac{d}{2})\frac{R^{n-1}}{n-1}(\frac{2}{d})^{n-2}\}^{\frac{1}{2}} + |a_1-b_1|(2\frac{R}{d})^{\frac{n-1}{2}}$ となり、結果が得られた。

3.4 [1] 内であたりまえのように使用されているが未だに解けないポアソン方程式

3.5 f^ε のサポートの評価

ここでは、空間Ω_ϵその上でのソボレフ空間 $H^1_{\epsilon_j}$ および、$H^1_{\epsilon_j}$上のグリーン作用素 T_{ϵ_j}その固有値$\mu_{\epsilon_j} > \lambda_{\epsilon_{j,1}} \geq \lambda_{\epsilon_{j,2}} \geq ...$と対応する正規化[*36]された固有ベクトル $f_{\mu_j}, f_{\lambda_{\epsilon_{j,1}}}...$ を考える。次に $\lambda_{\epsilon_{j,k}}$j=1,2,3... を考えて、添え数を簡略にするために、$H^1_{\epsilon_j}$を $H_j, \epsilon\lambda_{\epsilon_{j,k}}$を$\lambda_j$、対応する固有ベクトルを f_j、グリーン作用素を T_jと置くことにする。$\lim_{j\to\infty}\lambda_j = \lambda$ および、次の関数列に関する条件 (この条件を関数列の without concentration 条件ということにする。) を $\{f_j\}$ が満たすとする。

$$\exists\delta > 0,\ \varliminf_{j\to\infty}\int_{\Omega - B_\delta(0)}|f_j| > 0 \tag{55}$$

このとき、λは T_*(Ω上のディリキュレ境界条件のもとでのグリーン作用素）の固有値である。このことを示そう。

Proof. H_j上のノルムは $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ であたえられる。2 次元、3 次元上のヘルムホルツ共鳴器を与える geometry では、先に述べたように、$\|f\|_{L^2(\Omega_j)} \leq \exists K\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ で K は ϵ_j によらないようにとることができ

[*36] ノルムが 1 であること

る。いま、固有ベクトル f_j は正規化されているので、$\|f_j\|_{L^2(\Omega_j)} \le K$、ここで、$f_j$をΩ上に拡張して、つまり、

$$\tilde{f_j} \equiv \begin{cases} f_j \ (on\ \Omega_j) \\ 0 \ (on\ \Sigma_\epsilon) \end{cases}$$

とおくと $\|\tilde{f_j}\|_{L^2(\Omega)} \le K$ したがって、$subsection[2.5]$ で述べたように $\{\tilde{f_j}\}$ は $L^2(\Omega)$ で弱収束する部分列 { あらためて、その部分列を$\tilde{f_j}$とおく、またその収束値を f とする。} がとれる。同様にして、$\vec{g_j}$を

$$\vec{g_j} \equiv \begin{cases} \nabla f_j \ (on\ \Omega_j) \\ 0 \ (on\ \Sigma_\epsilon) \end{cases}$$

とおくと、$\vec{g_j}$は $L^2(\Omega)$ で弱収束する部分列がとれて（それを$\vec{g_j}$と改めておき、収束値を$\vec{g}$とおく）このとき、Ω上いたるところで[*37]、$\nabla f = \vec{g}$ が成立する。これを示す。

まず $\Omega_0 \equiv \Omega - [0]$ を考える。$\forall\vec{\phi} \in C_0^\infty(\Omega_0)$ に対して、$\int_\Omega \vec{g}\cdot\vec{\phi} = -\int_\Omega f\nabla\cdot\vec{\phi}$ を示す。このことが示されれば、Ω_0上で、$\vec{g} = \nabla f$ であり、(subsection[2.2])、結局 Ω上で、いたるところ$\vec{g} = \nabla f$ が成立することになる。ところで、$\vec{\phi} \in C_0^\infty(\Omega_0)$ ゆえ $\exists\delta > 0\ with\ \overline{\{x \in \Omega; \phi \neq 0\}} \subset \Omega - B_\delta(0)$ および、Ω_jは j を十分大きくとると $\Omega - B_\delta(0)$ を含む。したがって、

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \vec{g}\cdot\vec{\phi} \\ &\quad = \lim_j \int_\Omega \vec{g_j}\cdot\vec{\phi} \\ &\quad = \lim_j \int_{\Omega_j} \vec{g_j}\cdot\vec{\phi} \\ &\quad = \lim_j \int_{\Omega_j} \nabla f_j\cdot\vec{\phi} \\ &\quad = -\lim_j \int_{\Omega_j} f_j \nabla\cdot\vec{\phi} \\ &\quad = -\lim_j \int_\Omega \tilde{f_j}\nabla\cdot\vec{\phi} \\ &\quad = -\int_\Omega f\nabla\cdot\vec{\phi} \end{aligned} \tag{56}$$

となり、$\nabla f = \vec{g}$ を示すことができた。したがって、f は $H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}$に属すことがわかった、さらに f は $H_0^1 \equiv \{f \in W^{1,2}; f|_{\partial\Omega} = 0\}$ に属すことが次のようにしてわかる。

まず、$\nabla f_j \in L^2(\Omega_j) \subset L^2(\Omega - B_\delta(0))$ および、$\|\nabla f_j\|_{L^2(\Omega - B_\delta(0))} \le \|\nabla f_j\|_{L^2(\Omega_j)} = 1$ 故、f_jは $W^{1,2}(\Omega - B_\delta(0))$ において一様有界したがって、$Rellich$ の定理 ([2.5.3]) から f_jは、$L^2(\Omega - B_\delta(0))$ において、f に強収束する。このことと各 f_jは $H_j^1(\Omega_j)$ に属すので、$f_j|_{\partial\Omega} = 0$ であることから、トレース定理 ($subsection[3.8]$) を用いて $f|_{\partial\Omega} = 0$

[*37] almost all,　ほとんどすべてで、測度０の集合をのぞいての意味

が示される。最後に、λが T_*の固有値であることが、次のようにしてわかる。任意の$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega f\phi \\
&= \lim_j \int_\Omega \tilde{f}_j\phi \Leftarrow wlim_{L^2(\Omega)}\tilde{f}_j = f \\
&= \lim_j \int_{\Omega_j} f_j\phi \Leftarrow \tilde{f}_j\text{の定義} \\
&= \lim_j \lambda_j \int_{\Omega_j} \nabla f_j \nabla\phi \Leftarrow f_j\text{は } H_j\text{での固有ベクトル} \\
&= \lim_j \lambda_j \int_\Omega g_j \nabla\phi \Leftarrow g_j\text{の定義} \\
&= \lambda \int_\Omega g\nabla\phi \Leftarrow wlim g_j = g \text{ および } \quad lim\lambda_j = \lambda \\
&= \lambda \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla\phi \Leftarrow \nabla f = g \ \ a.a. \ at \ \Omega
\end{aligned}
\tag{57}
$$

となり、$T_* f = \lambda f$ を示すことができた。あとは、without concentration の条件から f は Ω 上で 0 ではない、つまり固有関数として採用できることがわかる。 □

従ってもし、μ_{ϵ_j}および対応する固有関数 f_{μ_j}がμ_0へ収束すれば, f_{μ_j}は *without concentration* をみたしてはならない。つまり、次の式が成立する。この条件を固有関数列 $\{f_{\mu_j}\}$ は、*with concentration* をみたすということにする。

$$\forall\delta > 0 \ \ with \ \overline{\lim_{j\to\infty}} \int_{\Omega - B_\delta(0)} |f_{\mu_j}| = 0 \tag{58}$$

3.5.1 with concentration **関数列の評価**

論文 [1] の Lemma 3.3 の内容をそのまま書く。

$\epsilon = \epsilon_j \to 0$ を考え、

$$\|f_\epsilon\|_{H_\epsilon(\Omega_\epsilon)} \le C \text{ とする。}^{*38}\text{このとき、次が成立する。} \tag{59}$$

$$\int_{\omega_\epsilon} |f_\epsilon - ⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon|^2 \to 0 \tag{60}$$

さらに、f_ϵが *with concentration*(58) をみたす場合

$$\int_{\Omega_\epsilon^{out}\cup\Gamma_\epsilon} |f_\epsilon|^2 \to 0 \tag{61}$$

Proof. 式 (60) は、ポアンカレの不等式 (36) を用いる。式 (61) はポアンカレ不等式 (3.3.5)(3.3.6) を用いる。詳細は別途記述する。 □

---

*38 f_ϵを正規化された固有関数を考えると、$C = 1$ である。

3.5.2　$\exists\epsilon_0 > 0$　固有値$\mu_\epsilon(\forall\epsilon \leq \epsilon_0)$ は $simple$(固有空間の次元が 1) である。

Proof. $f_\epsilon^1, f_\epsilon^2$を$\mu_\epsilon$の固有関数であり、$(f_\epsilon^k, f_\epsilon^l)_{H_\epsilon} = \delta_{k,l}$ にとる。ともに条件 (59) をみたすので、$\int_{\omega_\epsilon} |f_\epsilon^k - ⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^k|^2 \to 0$ 従って、

$$\begin{cases} \int_{\omega_\epsilon} |f_\epsilon^k|^2 = |\omega_\epsilon|(⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^k)^2 + o(1) \\ \\ |\int_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^1 f_\epsilon^2 - |\omega_\epsilon|(⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^1 ⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^2)| = |\int_{\omega_\epsilon}(f_\epsilon^1 - ⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^1)(f_\epsilon^2 - ⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^2)| = o(1) \end{cases}$$

ここで、$f_\epsilon^1, f_\epsilon^2$がともに$\mu_\epsilon$の固有関数であれば、式 (61) が成立するので、$\int_{\omega_\epsilon} |f_\epsilon^k|^2 = \int_{\Omega_\epsilon} |f_\epsilon^k|^2 + o(1) = 1 + o(1)$ および $\int_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^1 f_\epsilon^2 = \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon^1 f_\epsilon^2 + o(1) = o(1)$

つまり、式 3.5.2 は

$$\begin{cases} |\omega_\epsilon|(⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^k)^2 = 1 + o(1) \\ \\ |\omega_\epsilon|(⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^1 ⨍_{\omega_\epsilon} f_\epsilon^2)| = o(1) \end{cases}$$

となり両式が成立することはありえない。即ち、複数の独立した固有関数は取れない。つまり 固有値μ_ϵは $simple$ である。

□

3.6　$\lim_{ε\to 0} μ_ε = \frac{A_ε}{L_ε V_ε} = μ_0$

次の H_ϵ^1に含まれる関数$Χ_ε$を考える。

$$Χ_ε = \begin{cases} 1 & on\ ω_ε \\ 0 & on\ Ω_ε^{out} \\ -\frac{1}{L_ε}x & on\ Γ_ε \end{cases} \tag{62}$$

$T_ε$ の最大固有値$μ_ε$とその正規 (ノルムが 1 であること) な固有関数 $f_ε$をとる。

$\int_{Ω_ε}(f^ε Χ_ε) = \int_{Ω_ε}(\nabla T_ε(f^ε) \cdot \nabla Χ_ε) = \quad \int_{Ω_ε} μ_ε(\nabla f^ε \cdot \nabla Χ_ε)$ の両辺 $Χ_ε$の値を入れて それぞれ計算すると、

左辺=$\int_{ω_ε} f^ε - \int_{Γ_ε} xf^ε$

右辺=-$μ_ε \int_{Γ_ε} \frac{1}{L_ε}\frac{\partial f^ε}{\partial x} = μ_ε \frac{1}{L_ε}\{\int_{γ_ε^-} f^ε - \int_{γ_ε^+} f^ε\}$

ところで、$\int_{Γ_ε} xf^ε$ は $|\int_{Γ_ε} xf^ε| \leq \|f^ε\|_{L^2(Ω_ε)}(\int_{Γ_ε} x^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{L_ε^{\frac{3}{2}} A_ε^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$

右辺-左辺 + $\int_{Γ_ε} xf^ε$ を評価すると、

$$|μ_ε \frac{1}{L_ε}\{\int_{γ_ε^-} f^ε - \int_{γ_ε^+} f^ε\} - \int_{ω_ε} f^ε| \leq \frac{L_ε^{\frac{3}{2}} A_ε^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \tag{63}$$

上の式の両辺に $\frac{L_ε\sqrt{V_ε}}{μ_ε A_ε}$ をかけて

$$|\sqrt{V_ε}\{⨍_{γ_ε^-} f^ε - ⨍_{γ_ε^+} f^ε\} - \frac{L_ε V_ε \sqrt{V_ε}}{μ_ε A_ε} ⨍_{ω_ε} f^ε| \leq \frac{\sqrt{V_ε} L_ε^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3} A_ε^{\frac{1}{2}} μ_ε} \tag{64}$$

ここで $⨍$ は平均量　$⨍_{γ_ε^-} f^ε = \frac{1}{A_ε(γ_ε^- の面積)} \int_{γ_ε^-} f^ε$ のこと。
次に $\sqrt{V_ε}⨍_{ω_ε} f^ε$ の評価をする。
$\int_{ω_ε}(f^ε)^2 - |V^ε|(⨍_{ω_ε} f^ε)^2 = \int_{ω_ε}(f^ε - ⨍_{ω_ε} f^ε)^2 \geq 0$ および固有関数 $f^ε$ のサポート評価から $\int_{ω_ε}(f^ε)^2 = 1 + O(ε)$
$\int_{ω_ε}(f^ε - ⨍_{ω_ε} f^ε)^2 = \int_{ω_1}(f^ε - ⨍_{ω_1} f^ε(\epsilon x))^2 |d(\epsilon x)/dx| dx = \int_{ω_1}(f^ε - ⨍_{ω_1} f^ε(\epsilon x))^2 \epsilon^n dx \leq$ (この不等式はポアンカレの不等式のその 3)K（$f_ε$ によらない定数）$\int_{ω_1} |\nabla_x f^ε(\epsilon x)|^2 \epsilon^n dx = K\int_{ω_1} |\nabla_{\epsilon x} f^ε(\epsilon x)|^2 |\frac{\partial(\epsilon x)}{\partial x}|^2 \epsilon^n dx = K\int_{ω_ε} |\nabla_{\epsilon x} f^ε(\epsilon x)|^2 \epsilon^2 d(\epsilon x) = K\int_{ω_ε} |\nabla f^ε|^2 \epsilon^2 dx$
所で、$\int_{ω_ε} |\nabla f^ε|^2 \epsilon^2 dx = μ_ε^{-1} \int_{ω_ε} |f^ε|^2 \epsilon^2 dx \leq (μ_0^{-1} + δ)\, ε^2 = o(\epsilon)$、従って $|V^ε|(⨍_{ω_ε} f^ε)^2$=1 +O(ε)、つまり $\sqrt{V_ε}⨍_{ω_ε} f^ε$=1+O(ε). 次の補題で $|\sqrt{V_ε}\{⨍_{γ_ε^-} f^ε - ⨍_{γ_ε^+} f^ε\}$ が $1 + O(ε^{\frac{1}{3}})$ であることを証明するので、結局、式 (64) は、

$$|1 + O(ε^{\frac{1}{3}}) - \frac{L_ε V_ε}{μ_ε A_ε}(1 + O(ε))| \leq \frac{\sqrt{V_ε} L_ε^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3} A_ε^{\frac{1}{2}} μ_ε} = O(ε^{n/2}) \tag{65}$$

つまり $\lim_{ε \to 0} μ_ε = \frac{A_ε}{L_ε V_ε} = μ_0$

3.7　補題 $|\sqrt{V_ε}\{⨍_{γ_ε^-} f^ε - ⨍_{ω_ε} f^ε\}|$ は $O(ε^{\frac{1}{3}})$

ここで、次の $ω_ε$ 上の ポアソン方程式の解 $\psi_ε \in H^1(ω_ε)$ を用いる。$\psi_ε$ は次の条件をみたすポアソン方程式の唯一の解 ($H^1(w_ε)$ に含まれる) である。

$$\begin{aligned} Δ\psi_ε &= -\frac{A_ε}{V_ε} \ on\ ω_ε \\ \frac{\partial \psi_ε}{\partial n} &= \begin{cases} -1 & on\ γ_ε^- \\ 0 & on\ \partial ω_ε - γ_ε^- \end{cases} \\ \int_{ω_ε} \psi_ε &= 0 \end{aligned} \tag{66}$$

このとき次の評価が成立するので、$\int_{ω_ε}(\frac{A_ε}{V_\epsilon} f^ε) = -\int_{ω_ε} Δ\psi_ε f^ε = -\{\int_{ω_ε} \nabla\cdot(\nabla\psi_\epsilon \cdot f^\epsilon) - \int_{\omega_\epsilon}(\nabla f^\epsilon \cdot \nabla\psi_\epsilon)\}$
$= -\{\int_{\partial\omega_\epsilon} f^\epsilon \frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial n} - \int_{\omega_\epsilon}(\nabla f^\epsilon \cdot \nabla\psi_\epsilon) = \int_{\gamma_\epsilon^-} f^\epsilon + \int_{\omega_\epsilon}(\nabla f^\epsilon \cdot \nabla\psi_\epsilon)$
結局 $\int_{ω_ε}(\frac{A_ε}{V_\epsilon} f^ε) - \int_{\gamma_\epsilon^-} f^\epsilon = \int_{\omega_\epsilon}(\nabla f^\epsilon \cdot \nabla\psi_\epsilon)$ つまり

$$⨍_{ω_ε}(f^ε) - ⨍_{\gamma_\epsilon^-} f^\epsilon = A_\epsilon^{-1} \int_{\omega_\epsilon}(\nabla f^\epsilon \cdot \nabla\psi_\epsilon) \text{ を得る。} \tag{67}$$

さて、$|\int_{\omega_\epsilon}(\nabla f^\epsilon \cdot \nabla\psi_\epsilon)| \leq \|\nabla f^\epsilon\|_{L^2(\omega_\epsilon)} \cdot \|\nabla\psi_\epsilon\|_{L^2(\omega_\epsilon)} \leq (\mu_\epsilon^{-1})\|\nabla\psi_\epsilon\|_{L^2(\omega_\epsilon)}$ ここで、
$\|\nabla\psi_\epsilon\|^2_{L^2(\omega_\epsilon)} = \int_{\omega_\epsilon} \nabla\psi_\epsilon \cdot \nabla\psi_\epsilon = \int_{\partial\omega_\epsilon} \psi_\epsilon \frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial n} - \int_{\omega_\epsilon} Δ\psi_\epsilon \cdot \psi_\epsilon = \int_{\partial\omega_\epsilon} \psi_\epsilon \frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial n} = -\int_{\gamma_\epsilon^-} \psi_\epsilon$ となり、$\int_{\gamma_\epsilon^-} \psi_\epsilon$ を評価するために、trace 定理からの準備が必要である。trace 定理とは、領域の境界上の関数の積分値と内部領域の関数の微分値との関係をあたえる定理であり、詳細は次の subsection で書くことにし、ここでは ω_1 とその上の $\psi \in H^1_{\omega_1}$ との間に次の関係が成立することを認めることにする。

$$\|\psi\|_{L^p(\partial\omega_1)} \leq \exists K \|\nabla\psi\|_{L^2(\omega_1)} \tag{68}$$

ここで、p,K は ψ によらない正数であり、p は 2 より大きくとれることが重要である。具体的には、n=2 の場合は p は 2 以上の任意の値、n=3 の場合では、$2 < p < 4$ の範囲で取ることができる。この関係を用いて、へ

ルダーの不等式から、$\frac{2}{p}+\frac{1}{q}=1$ 即ち　$\frac{1}{q}=1-\frac{2}{p}>0$ となる q と$\gamma_1\subset\partial\omega_1$ となる境界上の領域 γ_1 に対して、

$$\int_{\gamma_1}\psi^2\le(\int_{\partial\omega_1}(\psi^2)^{\frac{p}{2}})^{\frac{2}{p}}|\gamma_1|^{\frac{1}{q}}\le\|\psi\|^2_{L^p(\partial\omega_1)}|\gamma_1|^{\frac{1}{q}}\le K^2\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\omega_1)}|\gamma_1|^{\frac{1}{q}} \tag{69}$$

が成立する。また、$|\int_{\gamma_\epsilon^-}\psi_\epsilon|\le\|\psi_\epsilon\|_{L^2(\gamma_\epsilon^-)}\cdot|\gamma_\epsilon^-|^{\frac{1}{2}}$ であること、および

$$\begin{aligned}\|\psi_\epsilon\|_{L^2(\gamma_\epsilon^-)}=(\int_{\gamma_\epsilon^-}\psi_\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}=(\int_{\epsilon\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}}\psi_\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}=\\ (\int_{\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}}\psi_\epsilon(\epsilon y)^2|\frac{d\epsilon y}{dy}|dy)^{\frac{1}{2}}\le\\ K\epsilon^{\frac{n-1}{2}}(\int_{\omega_1}|\nabla_x\psi_\epsilon(\epsilon x))|^2dx)^{\frac{1}{2}}|\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}|^{\frac{1}{2q}}=\\ K\epsilon^{\frac{n-1-n+2}{2}}(\int_{\omega_\epsilon}|\nabla_{\epsilon x}\psi_\epsilon(\epsilon x))|^2d(\epsilon x))^{\frac{1}{2}}|\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}|^{\frac{1}{2q}}=K\sqrt{\epsilon}\|\nabla\psi_\epsilon\|_{L^2(\omega_\epsilon)}|\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}|\end{aligned} \tag{70}$$

を考えれば、結局 $\|\nabla\psi_\epsilon\|^2_{L^2(\omega_\epsilon)}\le|\gamma_\epsilon^-|^{\frac{1}{2}}K\sqrt{\epsilon}|\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}|^{\frac{1}{2q}}\|\nabla\psi_\epsilon\|_{L^2(\omega_\epsilon)}$ 従って、

$$\|\nabla\psi_\epsilon\|_{L^2(\omega_\epsilon)}\le|\gamma_\epsilon^-|^{\frac{1}{2}}K\sqrt{\epsilon}|\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}|^{\frac{1}{2q}} \tag{71}$$

が成立する。式 (67) に戻って、評価すると、

$$|\fint_{\omega_\varepsilon}(f^\varepsilon)-\fint_{\gamma_\epsilon^-}f^\epsilon|\le A_\epsilon^{-1}\mu_\epsilon^{-1}\|\nabla\psi_\epsilon\|_{L^2(\omega_\epsilon)}\le A_\epsilon^{-\frac{1}{2}}K\sqrt{\epsilon}|\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}|^{\frac{1}{2q}} \tag{72}$$

両辺に $\sqrt{V_\epsilon}$をかけると、

$$\sqrt{V_\epsilon}|\fint_{\omega_\varepsilon}(f^\varepsilon)-\fint_{\gamma_\epsilon^-}f^\epsilon|\le\sqrt{V_\epsilon}A_\epsilon^{-\frac{1}{2}}K\sqrt{\epsilon}|\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}|^{\frac{1}{2q}} \tag{73}$$

ここで、 $\sqrt{V_\epsilon}A_\epsilon^{-\frac{1}{2}}K\sqrt{\epsilon}=\mathrm{O}(1)$ であること $|\frac{\gamma_\epsilon^-}{\epsilon}|$ が $O(\epsilon^2)$ であることを考えると、$\sqrt{V_\epsilon}|\fint_{\omega_\varepsilon}(f^\varepsilon)-\fint_{\gamma_\epsilon^-}f^\epsilon|=O(\epsilon^{\frac{1}{q}})$ であることが示された。$\frac{1}{q}=1-\frac{2}{p},p$ は $n=2$ では 2 以上の任意値、$n=3$ では 2 と 4 の間であるので、$\frac{1}{3}$程度にとると十分。

3.8 トレース問題

4 問題点とこれからの方向

一番の問題点は、ヘルムホルツ共鳴器を極限無限小としてとらえていることである。ここでの最大固有値とヘルムホルツ共鳴周波数との比較では、下からの評価、つまりヘルムホルツ共鳴周波数よりも低い周波数がでる固有値の存在は容易であるが、逆の評価、つまり、ピタリとヘルムホルツ共鳴周波数に一致する固有値が存在するかは極限操作をしないと示せない（し、その証明は極めて詳細、微妙な評価を積み重ねる）また、固有関数のサポートの問題が、その上からの評価で用いられるが、やはりその cabity からの固有関数のサポートのもれかたの評価は極限操作による。証明の中ではその評価が克明にされているので、詳細はある程度わかっている。その観点がら再度整理するのは、意味のないことではないように思う。

5 議論

5.1 cabity 境界に角があることと、対象とする関数空間を微分可能関数ではなくて、超関数の意味での微分可能関数にまで対象を広げたこととは関連があるか 2020.11.5

5.1.1 考察１

対象領域を通常の微分可能性から、弱い意味（超関数の意味）にまで、拡張せざるおえなかった理由（の一つ）は、微分可能関数は、微分を考慮した L^2 ノルムにおいてさえも、次の意味で閉じていないということがある。つまり、Ω上の微分可能関数の微分を考慮した L^2での極限（つまりソボレフ空間 $W^{1,2}$でのノルム) は微分可能ではなくなる。その例をあげてみる。(-1,1) 上の次の関数を考える。$f_n =$

$$\begin{cases} -x - \frac{1}{2n} & x \in (-1, -\frac{1}{2n}] \\ nx^2 & x \in (-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) \\ x - \frac{1}{4n} & x \in [\frac{1}{2n}, 1) \end{cases}$$

この f_nが $|x|$ へ $W^{1,2}$ノルムで収束することは明らかである。$|x|$ は $W^{1,2}$に属すけれども、原点で通常の意味での微分可能ではない。$W^{1,2}$の 収束列が $W^{1,2}$ へ属すことは、次のようにしてわかる。$f_n \in W^{1,2}$が収束列 *39 とすると、$L^2(\Omega)$ の完備性からそれぞれ、$\exists f, g \in L^2(\Omega)$ かつ $L^2(\Omega)$ ノルムで、f_nは f に、∇f_nは g へ収束することがわかる。従って、$g = \nabla f$ を示せば、$W^{1,2}$のノルムで f_nは f に収束することがわかる。このことは、$\vec{\phi} \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して、

$$\int g \cdot \vec{\phi} = lim \int \nabla f_n \cdot \vec{\phi} = lim - \int f_n \nabla \cdot \vec{\phi} = - \int f \nabla \cdot \vec{\phi} \tag{74}$$

から明らかである。

5.1.2 考察２

論文 [1] にルーズな証明という記述がある。おそらく、ヘルムホルツ共鳴器を固有値問題としてとらえようとした動機となるもので、次のようなものである。固有関数は $cabity$ 上で一定、外部では 0 (即ち、音は外部に漏らさない) $channel$ 上では $x-$ 軸方向に線形に減少する。とする。この仮定のもとに、次の計算を行う。

$$\frac{1}{\mu_\epsilon} \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon \cdot f_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla f_\epsilon \cdot \nabla f_\epsilon = \int_{\Gamma_\epsilon} \nabla f_\epsilon \cdot \nabla f_\epsilon == |A_\epsilon| \frac{1}{L_\epsilon}^2 |L_\epsilon| = \frac{|A_\epsilon|}{L_\epsilon} \tag{75}$$

一方

$$\int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon \cdot f_\epsilon = |V_\epsilon| + \int_0^{L_\epsilon} \frac{x}{L_\epsilon}^2 dx |A_\epsilon| = |V_\epsilon| + \frac{L_\epsilon}{3} |A_\epsilon| \tag{76}$$

従って、

$$\mu_\epsilon = \frac{L\epsilon |V_\epsilon|}{|A_\epsilon|} + \frac{L_\epsilon^2}{3} \tag{77}$$

従って、$\lim_{\mu \to 0} \mu_\epsilon = \mu_0$ 論文での記述は少し違っていて、... $[1]^{6p}$ この記述からでは、cabity と channel の接合部分 $\{\gamma_-^\epsilon\}$ での微分の破れは、関連するようだが、cabity の隅における滑らかさの欠如が効いてくるよう

*39 $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 |f_n - f_m| < \epsilon (\forall n, m > n_0)$ つまり、コーシー列のこと

ではない。

5.1.3 考察 3

文献 [3]^{190p} に次の記述がある。ディリクレ問題での固有関数に関して、もし領域 Ω が滑らかであれば、固有関数は $H^2(\Omega)$ に属す。証明は書かれていないし、面倒だという記述があるが、ヘルムホルツ共鳴器における固有関数においても同様なことがしめせるかも。

5.2 グリーン作用素とラプラス作用素

ローカルに話題になったので、コメントします。この文章全体で、グリーン作用素$= -\Delta^{-1}$ という書き方をしていますが、これはポアソン方程式 $\Delta u = -f$ をある種の境界条件のもとに解く。つまり、u を見つける。ということを前提に話をしています。一般的にグリーン作用素という言い方は、F(u) = f という方程式から f から u への対応付、F^{-1} についてつけられた名称のように思います。当然ながらこの F^{-1} を考えて、意味がある場合と、あまり有効でない場合があります。たまたま、斉次のディィリキュレ境界条件およびここで取り扱うヘルムホルツ共鳴を与える境界条件の場合には、有効であったということになろうかと思います。その根拠としては、ディレキュレ境界条件の場合での、ラプラス作用素では固有値が 0 に対応する固有関数は、つまり調和関数となりその最大値、最小値は境界上にあたえられることになります。従って、斉次のディリキュレ境界条件の場合は対応する固有関数は恒等的に 0 となり、これは 0 が固有値としては採用されないことを意味します。つまり、対応するグリーン作用素は、有界となります。ただし、話の流れとしては、逆で、グリーン作用素が有界であることが証明できるので、ラプラス作用素は 0 を固有値として持たないということが、証明される。ということになります。そうでない場合、たとえば、ノイマン境界でポアソン方程式を考える場合は、このような設定では、議論が進められなくて、ポアソン方程式ではなく。$\Delta u + u = -f$ などを対象にすると、同じように議論が進みます。このとき対応するグリーン作用素は $-(\Delta + I)^{-1}$ のようになると思います。

6 訂正または、気になった点

6.1 記号

6.1.1 $W_2^1 -> W^{1,2}$

ソボレフ空間 (一回微分可能および微分値とその関数自身が L^2空間に属する) の表記は、$W^{1,2}$が正しく、前回まで用いていた W_2^1は正しくないので全面修正した。(2020.11.9)

6.2 $W^{1,2}(\Omega)$ は連続関数とは限らない。

全ての $W^{1,2}(\Omega)$ に属する関数は連続関数のような言い方をしていたが、それは間違い。以下に埋蔵定理 ($The Sobolev Imbedding Theorem$) の $W^{p,2}$に関する記述の一部を与える。詳細は [6]$^{85pTheorem4.12}$
Ωが円錐条件*40をみたす場合：

*40 小さい円錐の独楽を考え、全ての境界点で、独楽の頂点を境界にとり他を領域内部にとることができるという条件、リプシッツ条件よりも弱い

$W^{1,2}(\Omega) \to {}^{*41} L^q(\Omega) for\ 2 \le q < \infty$
Ωが有界かつその境界がリプシッツ条件をみたす場合：
空間の次元が一次元、
$W^{1,2}(\Omega) \to C^{0,0.5}(\bar{\Omega})^{*42}$
空間の次元が２次元、
$W^{2,2}(\Omega) \to C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})\ for\ 0 < \lambda < 1.$
空間の次元が３次元、
$W^{3,2}(\Omega) \to C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})\ for\ 0 < \lambda < 1.$

6.3 $W^{1,2}(\Omega)$ が連続とはならない例

２次元の例、$\Omega = B_R(0)$、$R < 1$、f(x,y)=$log(log\frac{1}{r}), r = \sqrt{x^2+y^2}$ を考える。
この関数はあきらかに r=0 で∞をとり、連続ではない。一方、$\|f\|_{L^2(\Omega)}$ を計算すると、
$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{B_R(0)} |f^2| dxdy = 2\pi \int_0^R (log\ log\ \frac{1}{r})^2 \cdot rdr$ ここで、$log\ \frac{1}{r} < \frac{1}{r}$ 、$0 < r < 1$ なので、
上式 $\le 2\pi \int_0^R (log\ \frac{1}{r})^2 \cdot rdr = 2\pi \int_0^R (log\ r)^2 \cdot rdr = 2\pi\{\frac{R^2}{2}((log\ R)^2 - log\ R) + \frac{R^2}{4}\} < \infty$ となり、$f(x,y)$ は $L^2(\Omega)$ に属す。さらに、$\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ を計算すると、$\nabla f \cdot \nabla f = \frac{1}{(log\ r)^2 r^2}$*43
従って、$\|\nabla f\|_{L^2(B_R(0))} = \int_{B_R(0)} \frac{1}{(log\ r)^2 r^2} dxdy = 2\pi \int_0^R \frac{1}{(log\ r)^2 r^2} \cdot rdr = -2\pi[\frac{1}{log\ r}]_0^R = -\frac{2\pi}{log\ R} < \infty$ であり、f は $W^{1,2}$ に属す。

6.4 **２次元以上のラプラシアンの基本解は** $W^{1,2}(B_R(0))$ には属さない

n-次元球対象関数 *44$E(|\vec{x}|) = E(r)$ において、$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n{}^{*45}} r^{1-n}$を満たす関数をラプラシアンの基本解*46という。
ここでは、結果のみを与える。つまり、詳しく考えていない。

$$\begin{cases} \int_{B_R(0)} \nabla E(|\vec{x}|) \cdot \nabla E(|\vec{x}|) d\vec{x} = \frac{1}{\omega_n} \int_0^R r^{2-2n} \cdot r^{n-1} dr = [\frac{1}{2-n} r^{2-n}]_0^R = \infty、(n > 2) \\ \int_{B_R(0)} \nabla E(|\vec{x}|) \cdot \nabla E(|\vec{x}|) d\vec{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2\pi}[log\ r]_0^R = \infty、(n = 2) \end{cases}$$

従って $E(|\vec{x}|)$ は $W^{1,2}(B_R(0))$ に属さない。

6.5 H^1_ϵ は $C^1_0(\Omega_\epsilon)$ で近似 (W^1_2 ノルム) できるか？

参考文献

[1] B. Schweizer The low-frequency spectrum of small Helmholtz resonators
[2] 熱・波動と微分方程式　俣野博　神保道夫　岩波　現代数学への入門
[3] 関数解析　藤田宏　岩波　応用数学　基礎５

*41 → の左が右に埋め込まれていることを表す
*42 0.5 ヘルダー連続つまり、$|\phi(x) - \phi(y)| \le K|x-y|^{0.5}$
*43 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \frac{1}{r}} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r}{log\frac{1}{r}} \cdot \frac{-1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{x}{(log\ r) \cdot r^2}$
*44 つまり、距離—x—=r の関数
*46 $\int_{R^n} E(x-y)\rho(y)dy = \rho(x)$ が $\forall \rho \in C_0^2(R^n)$ で成立する

[4] 実関数とフーリエ解析　高橋陽一郎　岩波　現代数学の基礎

[5] 楽器の物理学　 N.H. フレッチャー/T.D. ロッシング

[6] Sobolev spaces 2nd ed Robert A. Adams and John J.F.Fournier 2003

[7] Elliptic partial differential equations of second order,:us,2nd ed. David Gilbarg,Neil S.Trudinger

[8] 偏微分方程式論　溝畑茂　岩波　現代数学９