2021/05/06

スパイダーアルゴリズムでの拡大開始点での拡大率をゆるやかにあたえる方法

大野泰治郎

目次

1 目的

現バージョンのスパイダーアルゴリズムでは、拡大開始点での拡大率が急に増加する。これは数値計算上望ましくない（ようだ。？）なぜそうなるのか、回避するにはどうしたらよいのか。を示し、改訂版の候補を与える。

2 スパイダーアルゴリズム

スパイダーアルゴリズムとは $p_0 \in R^3$を拡大の原点、$C_u \in {R_+}^3$を正規化係数として、$\hat{p} = \alpha(p)\frac{p-p_0}{C_u} \cdot C_u + p_0 = \alpha(p)(p-p_0)+p_0$ できまるpから $\hat{p}$への変換アルゴリズムのことを言う。

ここで、$\alpha(p) \equiv f(|\frac{p-p_0}{C_u}|_m)$ ただし、$v \in R^3$に対して、$|v|_m \equiv \max\{|v_x|, |v_y|, |v_z|\}$ および、β_1(通常 $=1.) < \beta_2$、$0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leq 1.$

$f(x) \equiv$

$$\begin{cases} \beta_1 & x \in [0., \gamma_1) \\ g(x) & x \in [\gamma_1, \gamma_2] \\ \beta_2 & x \in (\gamma_2, 1.] \end{cases}$$

ここで、$g(x)$ は $[\gamma_1, \gamma_2]$ から $[\beta_1, \beta_2]$ への $g(\gamma_1) = \beta_1$、$g(\gamma_2) = \beta_2$を満たす正の単調増加関数である。現バージョンのアルゴリズムでは、$g(x) = \frac{\beta_2-\beta_1}{\gamma_2-\gamma_1}(x-\gamma_1)+\beta_1$ で与えられている。

3 拡大後の点のノルム $|\hat{p}|$ を拡大前の点のノルム $|p|$ の関数として表す。

p_0 は本質的でないので、原点 (0.,0.,0.) と考えることにする。このとき、$\hat{p} = \alpha(p)p$ である。$p \neq 0 \in R^3$ に対して $t = |p|$ (ベクトル p のノルム）とおき、$a \in R^3 \equiv \frac{p}{t}$ とする。
書き直せば、$|\hat{p}| = |\alpha(p)p| = |\alpha(p)|t = f(|\frac{p}{C_u}|_m)t = f(|\frac{at}{C_u}|_m)t = f(t|\frac{a}{C_u}|_m)t$
$=$

$$\begin{cases} \beta_1 t & t \in [0., \frac{\gamma 1}{A}) \\ g(At)t & t \in [\frac{\gamma 1}{A}, \frac{\gamma 2}{A}] \\ \beta_2 t & t \in (\frac{\gamma 2}{A}, \frac{1.}{A}] \end{cases}$$

ここで $A \equiv |\frac{a}{C_u}|_m$ とおいた。

4 拡大開始点での拡大率をみる。

拡大開始点とは、前節での $t = \frac{\gamma_1}{A} \downarrow$ のことである。また、拡大開始点での拡大率とは、$\lim_{t \downarrow \frac{\gamma 1}{A}} \frac{d(g(At)t)}{dt}$ のことである。従って、この値は、$\lim_{t \downarrow \frac{\gamma 1}{A}} \frac{dg(At)}{dt} t + g(\gamma_1)$ となる。
$g(\gamma_1)$ は g の定義からβ_1に等しい。つまり、上式は$\lim_{t \downarrow \frac{\gamma 1}{A}} \frac{dg(At)}{dt} \frac{\gamma 1}{A} + \beta_1 = \lim_{t \downarrow \gamma 1} \frac{dg(t)}{dt} \gamma_1 + \beta_1$、ここで現アルゴリズムでは、$\lim_{t \downarrow \gamma 1} \frac{dg(t)}{dt} = \frac{\beta 2 - \beta 1}{\gamma_2 - \gamma_1}$ である。つまり、拡大率が $t = \frac{\gamma 1}{A}$でβ_1から$\frac{\beta 2 - \beta 1}{\gamma_2 - \gamma_1}\gamma_1 + \beta_1$に上がる。$\frac{\beta 2 - \beta 1}{\gamma_2 - \gamma_1}\gamma_1$の値は、例えば、$\gamma_1 = 0.5$、$\gamma_2 = 1.$、$\beta_1 = 1.$、$\beta_2 = 3.$で、2 になる。つまり、拡大率は $t = \frac{\gamma_1}{A}$でβ_1から$\beta_1 + 2.$に突然にあがることになる。

5 拡大開始点での拡大率を $\beta_1 (= 1.)$ にするためには

前節でみたように、拡大開始点での拡大率は、$\lim_{t \downarrow \gamma 1} \frac{dg(t)}{dt} \gamma_1 + \beta_1$ で与えられる。従って、$\frac{dg(t)}{dt} = 0.$であれば、拡大率はβ_1である。

6 拡大開始点での拡大率を β_1 とする。具体例

$g(x) = ax^2 + bx + c$ を次の条件をみたすように a、b、c を決めればよい。

$$\begin{cases} \text{条件 1} & g(\gamma_1) = \beta_1 \Rightarrow a(\gamma_1)^2 + b\gamma_1 + c = \beta_1 \\ \text{条件 2} & \frac{dg(t)}{dt}|_{t=\gamma_1} = 0. \Rightarrow 2a\gamma_1 + b = 0. \\ \text{条件 3} & g(\gamma_2) = \beta_2 \Rightarrow a(\gamma_2)^2 + b\gamma_2 + c = \beta_2 \end{cases}$$

7 注意

γ_2 はぎりぎりまで伸ばす必要がある。つまり、$\gamma_2 \geq |(p - p_0)/C_u|_m$

8 例

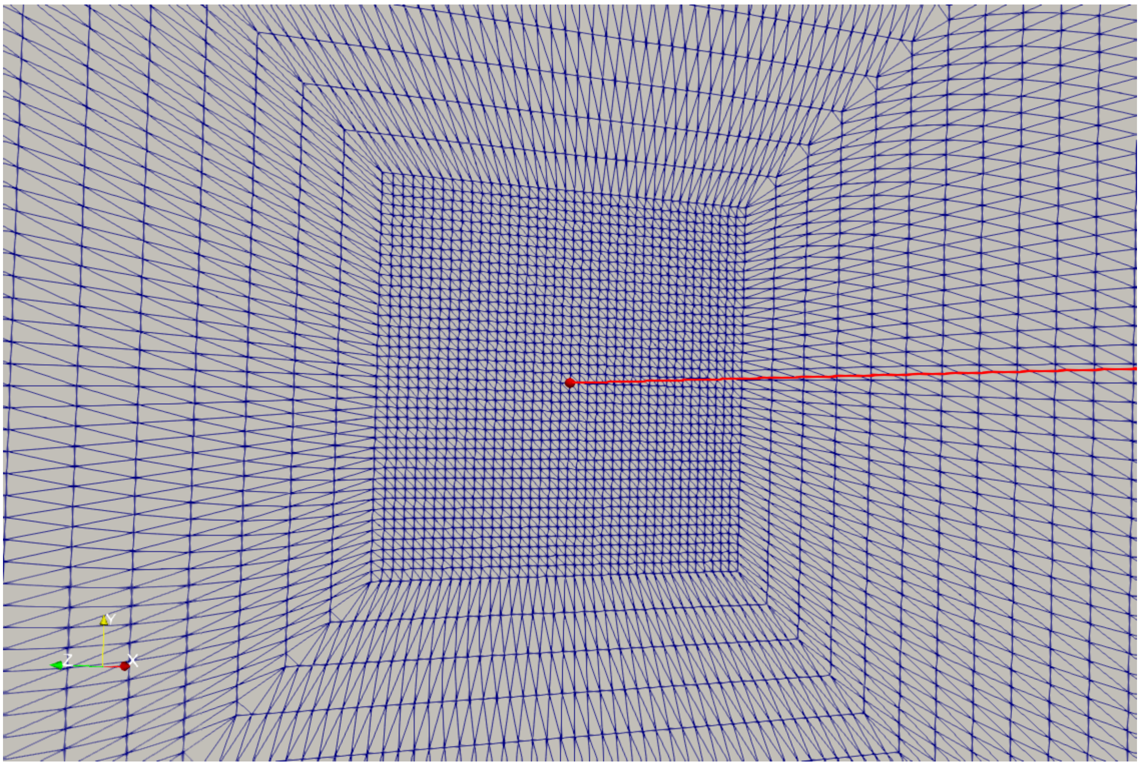

図 1　l=140,m=70,n=70, (80,40,40) 現スパイダーアルゴリズム

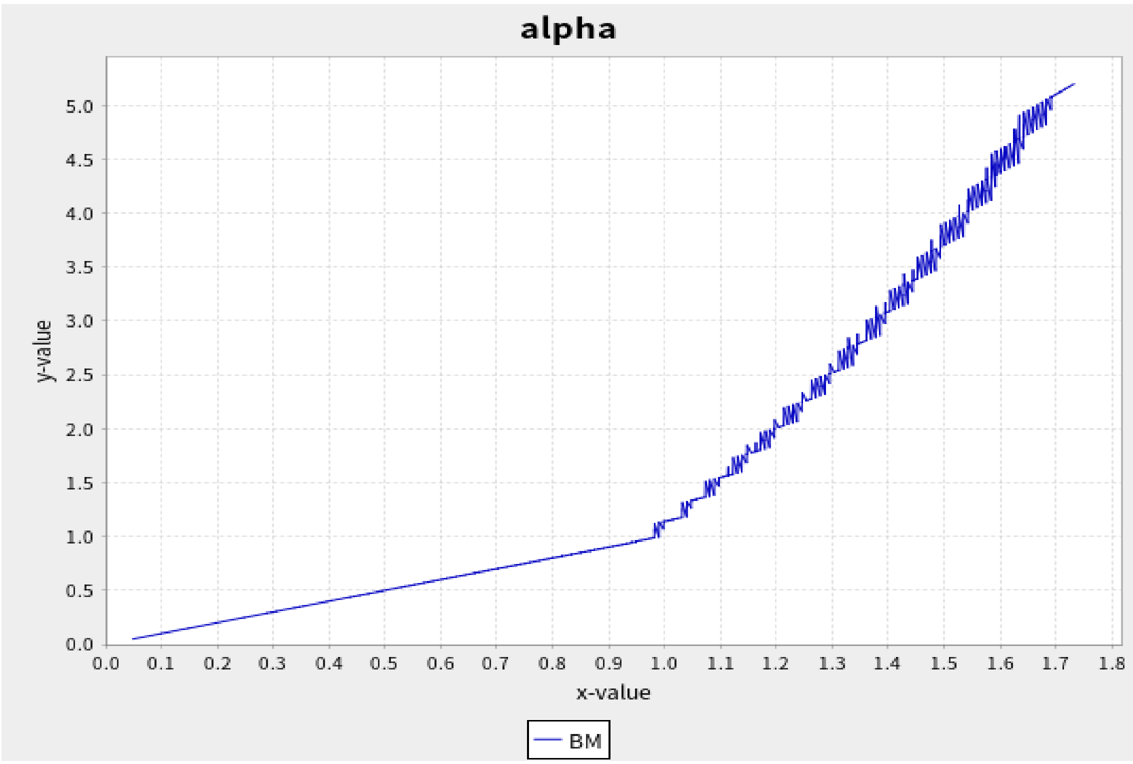

図 2　(1,1,1) 方向 —($|p|$, $|\hat{p}|$)p (80,40,40) 現スパイダーアルゴリズム

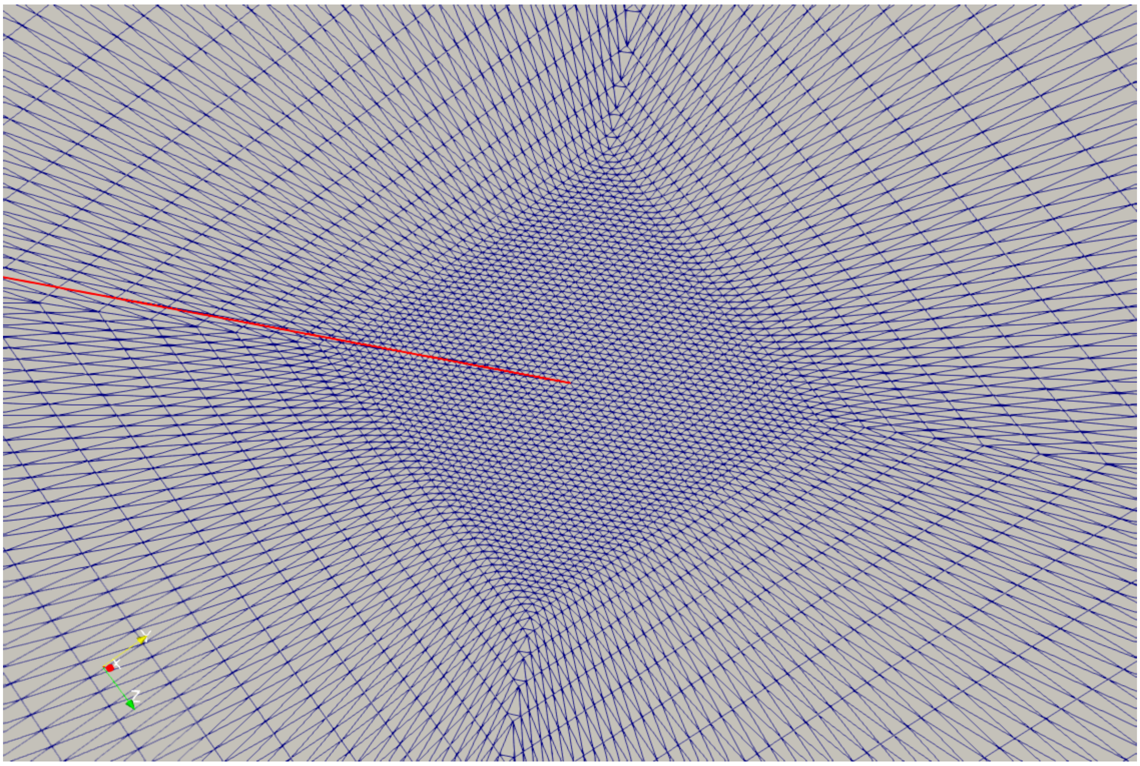

図 3　l=140,m=70,n=70, (80,40,40)　2 次曲線スパイダーアルゴリズム

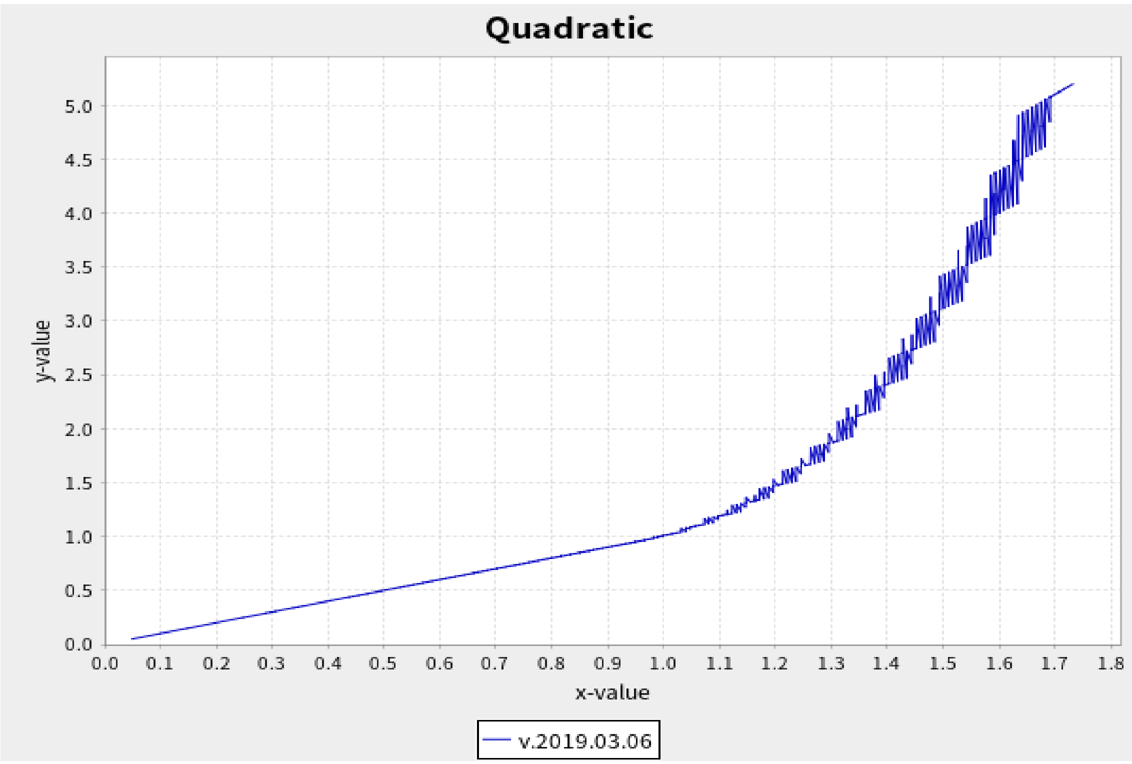

図 4　(1,1,1) 方向 —$(|p|, |\hat{p}|)$p (80,40,40)　2 次曲線スパイダーアルゴリズム