2021/05/12

スパイダーアルゴリズムでの拡大後の縦横比の計算

大野泰治郎

目次

1 目的

拡大後の x-方向,y-方向の拡大比率の最大値を計算する。

2 スパイダーアルゴリズム

スパイダーアルゴリズムとは $p_0 \in R^3$を拡大の原点、$C_u \in {R_+}^3$を正規化係数として、$\hat{p} = \alpha(p)\frac{p-p_0}{C_u} \cdot C_u + p_0 = \alpha(p)(p-p_0) + p_0$ できまる p から $\hat{p}$への変換アルゴリズムのことを言う。
ここで、$\alpha(p) \equiv f(|\frac{p-p_0}{C_u}|_m)$ ただし、$v \in R^3$に対して、$|v|_m \equiv \max\{|v_x|, |v_y|, |v_z|\}$ および、β_1(通常 $= 1.) < \beta_2$、$0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leq 1.$
$f(x) \equiv$

$$\begin{cases} \beta_1 & x \in [0., \gamma_1) \\ g(x) & x \in [\gamma_1, \gamma_2] \\ \beta_2 & x \in (\gamma_2, 1.] \end{cases}$$

ここで、$g(x)$ は $[\gamma_1, \gamma_2]$ から $[\beta_1, \beta_2]$ への $g(\gamma_1) = \beta_1$、$g(\gamma_2) = \beta_2$を満たす正の単調増加関数である。旧バージョンのアルゴリズムでは、$g(x) = \frac{\beta_2-\beta_1}{\gamma_2-\gamma_1}(x-\gamma_1) + \beta_1$ で与えられている。
又、現バージョン (Spider2) では, $g(x) = \frac{\beta_2-\beta_1}{(\gamma_2-\gamma_1)^2}(x-\gamma_1)^2 + \beta_1$ で与えられている。

3 拡大後の点の x-座標 $\hat{p}_x$ を拡大前の点の点 p の x-座標での微分値を考える。

p_0 は本質的でないので、原点 (0.,0.,0.) と考えることにする。また、p を（従って $\hat{p}$ を）のドメインを第一象限 $(0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z)$ かつ$\frac{y}{C_{uy}} < \frac{x}{C_{ux}}, \frac{z}{C_{uz}} < \frac{x}{C_{ux}}$ に制限する。ここで、$C_u = (C_{ux}, C_{uy}, C_{uy})$ とおいた。
このとき、$\hat{p} = \alpha(p)p$ なので、$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \frac{\partial \alpha(p)}{\partial x} p + \alpha(p) \frac{\partial p}{\partial x}$
さらに、$\frac{\partial \alpha(p)}{\partial x}$ は、$\alpha(p)$ の定義と、今考えているドメインでは $|\frac{p}{C_u}|_m = \frac{x}{C_{ux}}$ なので、

$$\frac{\partial \alpha(p)}{\partial x} = g'(t) \frac{1}{C_{ux}} \tag{1}$$

ただし、$t = \frac{x}{C_{ux}}$ とおいた。従って、

$$\frac{\partial \hat{p}_x}{\partial x} = \frac{\partial \alpha(p)}{\partial x} p_x + \alpha(p) \frac{\partial p_x}{\partial x} = g'(t) \frac{1}{C_{ux}} p_x + \alpha(p) \frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{2}$$

ところで、$p_x = x$ なので、結局上の式は、

$$\frac{\partial \hat{p}_x}{\partial x} = \frac{\partial \alpha(p)}{\partial x} p_x + \alpha(p) \frac{\partial p_x}{\partial x} = g'(t)t + g(t) = (g(t)t)' \tag{3}$$

という形になる。

4 拡大後の点の y-座標 $\hat{p}_y$ を拡大前の点の点 p の y-座標での微分値を考える。

まったく同じ議論で、ただし、$\frac{\partial \alpha(p)}{\partial x} = 0$ を考慮すると。

$$\frac{\partial \hat{p}_y}{\partial y} = \alpha(p) \frac{\partial p_y}{\partial y} = g(t) \tag{4}$$

5 拡大後の x-方向と y-方向の最大比率

$$\max_{\gamma 1 \leq t \leq \gamma 2} \frac{(g(t)t)'}{g(t)} \text{を具体的な } g \text{ を代入して、計算すればよい。} \tag{5}$$

6 具体例

旧アルゴリズム　上記の値は t=γ_1 で最大で、１４程度
spider2 では６から７程度

7 注意

上の値は x-方向,y-方向のそれぞれの拡大後の拡大率の比較であって、セグメントの長さの比ではない。（長さの比ですると３倍程度大きくなるのではないか）