2022/01/14

Orr-Sommerfeld equation の導出 (改定)

大野泰治郎

1　目的

２次元ナビア・ストークス方程式がらオール・ザンマーヘルト方程式を導出する。その時の仮定を明確にする。

2　基礎方程式

2.1　ナビア・ストークス方程式

$$\rho \cdot \frac{D}{Dt}\vec{v} = \nabla p + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \mu\Delta\vec{v} \tag{1}$$

ρ 密度
$\vec{v}$ 速度ベクトル
μ 係数
p 圧力

2.2　オール・ザンマーヘルト方程式

テキスト (A feedbackmodel of the edhe tone,using the adjoint Orr-Sommerfeld equation) の (2.6)

$$(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)^2\hat{\Psi} = \frac{i}{\nu}((\alpha U(y) - \omega)(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\hat{\Psi} - \alpha\frac{d^2U}{dy^2}\hat{\Psi}) \tag{2}$$

$$\Psi_d(x, y, t) = C_0\hat{\Psi}(y)exp(i(\alpha x - \omega t)) \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_d = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \\ \\ v_d = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \end{cases} \tag{4}$$

2.3　ナビア・ストークスとオール・ザンマーヘルト方程式内の記号合わせと全体の流れ関数 Φ の定義

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{cases} u_d = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \\ \\ v_d = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \end{cases} + \begin{cases} u_p = U(y) \\ \\ v_p = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \end{cases} \quad \text{ここで}\Phi = \Psi + \int U dy \tag{5}$$

2.4　流体に対する仮定その１

（仮定の１）密度 ρ は定数、従って（質量保存則から）$\nabla \cdot \vec{v} = 0$

2.5　N.S を成分ごとに書いてみる

$$\begin{cases} \rho \cdot (\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}uu + \frac{\partial}{\partial y}uv) = \frac{\partial}{\partial x}p + \mu\Delta u ...(a) \\ \\ \rho \cdot (\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}vu + \frac{\partial}{\partial y}vv) = \frac{\partial}{\partial y}p + \mu\Delta v ...(b) \end{cases} \tag{6}$$

2.6　N.S から p を消去する。このとき、流れ関数 Φ を利用する。

(a) の両辺を y で偏微分したものから (b) の両辺を x で偏微分したものを引いて、$(u, v) = (\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x})$ を代入して、まとめると次の式を得る。

$$^{*1}\Delta(\Delta\Phi) = \frac{1}{\nu}\{\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial y}\} \tag{7}$$

ここで 、$\nu = \frac{\mu}{\rho}$

2.7　Φに$\Psi_d + \int U dy$ を代入し、式（3）を考慮して、各微分値を計算する。

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= (\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\Psi_d + \frac{dU}{dy} \\ \frac{\partial}{\partial x}\Phi &= \frac{\partial}{\partial x}\Psi_d = i\alpha\Psi_d \\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi &= \frac{d}{dy}\Psi_d + U \\ \frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi &= i\alpha(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\Psi_d \\ \frac{\partial}{\partial y}\Delta\Phi &= (\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\frac{d}{dy}\Psi_d + \frac{d^2U}{d^2y} \\ \frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi &= -i\omega(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)(\Psi_d) \end{aligned} \tag{8}$$

2.8　式 (7) の左辺に式 (8) を代入する。

$$\Delta(\Delta\Phi) = (\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)^2\Psi_d + \frac{d^3U}{d^3y} \tag{9}$$

[*1] 岡本久　ナヴィアストークス方程式の数理 19p

2.9 式 (7) の右辺に式 (8) を代入し、整理する。

$$
\begin{aligned}
\text{式 } (7) = \frac{1}{\nu}\{ \\
-i\omega(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)(\Psi_d) \\
+(\frac{d}{dy}\Psi_d + U)(i\alpha(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\Psi_d) \\
-(i\alpha\Psi_d)((\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\frac{d}{dy}\Psi_d + \frac{d^2U}{d^2y}) \\
\}
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{i}{\nu}\{ \\
(\alpha U - \omega)(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\Psi_d \\
-\alpha\Psi_d\frac{d^2}{d^2y}U \\
+(\frac{d}{dy}\Psi_d)(\alpha(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\Psi_d) \\
-\alpha\Psi_d(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\frac{d}{dy}\Psi_d \\
\}
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{i}{\nu}\{ \\
(\alpha U - \omega)(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\Psi_d \\
-\alpha\Psi_d\frac{d^2}{d^2y}U \\
+\alpha(\frac{d}{dy}\Psi_d\frac{d^2}{dy^2}\Psi_d - \Psi_d\frac{d^3}{dy^3}\Psi_d) \\
\}
\end{aligned} \tag{12}
$$

ここまで、で次の式を得る。

2.10 式 (7)

$$
(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)^2\Psi_d + \frac{d^3U}{d^3y} = \frac{i}{\nu}\{(\alpha U - \omega)(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\Psi_d - \alpha\Psi_d\frac{d^2}{d^2y}U + \alpha(\frac{d}{dy}\Psi_d\frac{d^2}{dy^2}\Psi_d - \Psi_d\frac{d^3}{dy^3}\Psi_d)\} \tag{13}
$$

2.11 流体に対する仮定その２

（仮定の２） $\frac{\partial^3}{\partial y^3}U = 0$

2.12 流体に対する仮定その３

（仮定の３）　$\frac{d}{dy}\Psi_d\frac{d^2}{dy^2}\Psi_d - \Psi_d\frac{d^3}{dy^3}\Psi_d = 0$

2.13 結論

仮定の２、３と両辺から $C_0exp(i(\alpha x - \omega t))$ を除くと。

$$(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)^2\hat{\Psi} = \frac{i}{\nu}((\alpha U(y) - \omega)(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2)\hat{\Psi} - \alpha\frac{d^2U}{dy^2}\hat{\Psi}) \tag{14}$$

を得る。

2.14 注意

2.12 は次と同値

$$\frac{d}{dy}\hat{\Psi}\frac{d^2}{dy^2}\hat{\Psi} - \hat{\Psi}\frac{d^3}{dy^3}\hat{\Psi} = 0 \tag{15}$$

この式から、$\hat{\Psi}(y) = A\exp\sqrt{C}y + B\exp-\sqrt{C}y$ でないといけない。