2022/02/02

Bi-orthogonality normal operator and adjoint operator

大野泰治郎

1 目的

文献 [3] 内の式 (2.12) $[[\hat{\psi}_l^\dagger \cdot \hat{\psi}_k]] = \delta_{lk}$ を明確にすること。文献 [2] に大体従う。

1.1 背景

一般の実ヒルベルト空間において、linear operator A の adjoint operatorA^* とは、次の定義である。
$(Ax, y) = (x, A^*y)$
このとき、一般に A と A^* の固有値と固有空間は一対一の関係があり、A での異なった固有値に対する固有空間は一般には互いに直交することは示せないが、A と A^* との間では、異なる固有値に対応する固有空間が直交することは、次の一行で証明される。

$$\lambda(x_\lambda, x_\mu) = (Ax_\lambda, x_\mu) = (x_\lambda, A^*x_\mu) = \mu(x_\lambda, x_\mu) \tag{1}$$

ここで、x_λは A の固有値λに対する固有ベクトル、x_μは A^*の固有値μに対する固有ベクトル。

1.2 対象となる方程式

2次元、非圧縮流体であり、定常流 $\vec{V}$ の回りでの擾乱 $\vec{v}$ を以下のように線形化した N.S 方程式を考える。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}U(y) + \begin{pmatrix} U'v_y \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla p - \frac{1}{R}\Delta \vec{v}^{*1} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + Ł(\vec{v}) + \nabla p = 0 \tag{2}$$

ここで、

$$Ł(\vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}U(y) + \begin{pmatrix} U'v_y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{R}\Delta \vec{v}$$

および

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} U(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, U' = \frac{\partial U(y)}{\partial y}$$

1.3 Lagrange Identity

$$(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + Ł(\vec{v}) + \nabla p) \cdot \vec{\tilde{v}} + \vec{v} \cdot (\frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial t} + \tilde{L}(\vec{\tilde{v}}) + \nabla \tilde{p}) = \frac{\partial (\vec{v} \cdot \vec{\tilde{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot J(\vec{v}, \vec{\tilde{v}}, p.\tilde{p}) \tag{3}$$

を満たすように、L の $adjoint$ 微分作用素$\tilde{L}$および $J(\vec{v}, \vec{\tilde{v}}, p.\tilde{p})$ を定義していく。非圧縮流体の仮定から、$\nabla \cdot \vec{v} = 0$、対応する adjoint N.S 方程式を非圧縮を仮定し、$\nabla \cdot \vec{\tilde{v}} = 0$ とする。

*1 U”(y)=0 を仮定しているようだ

従って、$\nabla p \cdot \vec{\tilde{v}} = \nabla p \cdot \vec{\tilde{v}} + p\nabla \cdot \vec{\tilde{v}} = \nabla \cdot (p\vec{\tilde{v}})$ 同様に $\nabla \tilde{p} \cdot \vec{v} = \nabla \tilde{p} \cdot \vec{v} + \tilde{p}\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\tilde{p}\vec{v})$
つまり、圧力の部分は定義できた。L 内の の各微分作用素に対してどのように定義するかそのときの $J(\vec{v},\vec{\tilde{v}},p,\tilde{p})$ の値がどうなるかを調べていく。

1.3.1 $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot U\vec{\tilde{v}}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} U \cdot \vec{\tilde{v}} + \vec{v} \cdot \square = \nabla \cdot \square \tag{4}$$

この □ を埋める。次のようになる。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} U \cdot \vec{\tilde{v}} + \vec{v} \cdot \frac{\partial U \vec{\tilde{v}}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} U \cdot \vec{\tilde{v}}) \tag{5}$$

1.3.2 $\begin{pmatrix} U' v_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} U' v_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\tilde{v}} + \vec{v} \cdot \square = \nabla \cdot \square \tag{6}$$

この □ を埋める。次のようになる。

$$\begin{pmatrix} U' v_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\tilde{v}} - \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ U' \tilde{v}_x \end{pmatrix} = 0 \tag{7}$$

1.3.3 $\Delta \vec{v}$

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} \cdot \vec{\tilde{v}} + \vec{v} \cdot \square = \nabla \cdot \square \tag{8}$$

この □ を埋める。次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} \cdot \vec{\tilde{v}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial x} - \vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\tilde{v}}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \vec{\tilde{v}} - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial x}) \tag{9}$$

従って、

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{\tilde{v}} - \vec{v} \cdot \Delta \vec{\tilde{v}} = \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \vec{\tilde{v}} - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \vec{\tilde{v}} - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \cdot ((a_{ij})\tilde{v}_i - (\tilde{a}_{ij})v_i) \tag{10}$$

$$a_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}、\tilde{a}_{ij} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \tag{11}$$

ここで、$x_1 = x$、$x_2 = y$、$v_1 = v_x$、$v_2 = v_y$等

1.3.4 $L(\vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} U(y) + \begin{pmatrix} U' v_y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{R}\Delta \vec{v}$

$$L(\vec{v}) \cdot \vec{\tilde{v}} + \vec{v} \cdot \tilde{L}(\vec{\tilde{v}}) = \nabla \cdot (\begin{pmatrix} \vec{v} U \cdot \vec{\tilde{v}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{R}(+(a_{ij})\vec{\tilde{v}} - (\tilde{a}_{ij})\vec{v})) \tag{12}$$

$$\tilde{L}(\vec{\tilde{v}}) = \frac{\partial U \vec{\tilde{v}}}{\partial x} - \begin{pmatrix} 0 \\ U' \tilde{v}_x \end{pmatrix} + \frac{1}{R}\Delta \vec{\tilde{v}} \tag{13}$$

1.3.5 $J(\vec{v}, \vec{\tilde{v}}, p, \tilde{p})$

いままでをまとめると

$$J(\vec{v}, \vec{\tilde{v}}, p, \tilde{p}) = (\begin{pmatrix} \vec{v}U \cdot \vec{\tilde{v}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{R}(+(a_{ij})\vec{\tilde{v}} - (\tilde{a}_{ij})\vec{v})) + p\vec{\tilde{v}} + \tilde{p}\vec{v} \tag{14}$$

参考文献

[1] Salwen H. 1979 Expansions in Spatial or Temporal Eigenmodes of the Linearized Navier-Stokes Equations, Bull. Am. Phys. Soc. 24, 74.

[2] Hill D.C. 1995 J. Fluid Mech. vol. 292,pp, 183-204 Adjoint systems and their role in the receptivityproblen for boundary layers

[3] Nagy P. Szabo A. Paal G. 2021 J. Fluid Mech. vol 915 A feedback model of the edge tone , using the adjoint Orr-Sommerfeld equation