2022/09/20

Lighthill ８（７）乗則

大野泰治郎

1　目的

Lighthill の８（７）乗則の導出

2　基礎方程式

2.1　非斉波次動方程式 (dim = 1, 2, 3)

$$(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \Delta_x)u(x,t) = f(x,t) \tag{1}$$

2.2　解法

[*1]

$$u(x,t) = c_0^2(W * f)(x,t) \equiv c_0^2 \int_0^t \int_{R^d} W(x-\xi, t-s) f(\xi, s) d\xi ds \tag{2}$$

$$\begin{cases} W(x,y) = \frac{1}{2c_0} & (|x| \leq c_0) \quad dim = 1 \\ W(x,y) = \frac{1}{2\pi c_0}\frac{1}{\sqrt{(c_0 t)^2 - |x|^2)}} & (|x| \leq c_0 t) \quad dim = 2 \\ W(x,y) = \frac{1}{4\pi c_0^2}\delta(c_0 t - |x|) * \frac{1}{t} \quad dim = 3 \end{cases} \tag{3}$$

3　３次元

$$u(x,t) = C_0^2 \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_0^t \int_{R^3} \delta(c_0(t-s) - |x-\xi|)) \frac{1}{t-s} f(\xi, s) d\xi ds \tag{4}$$

3.1　f(x,t)

$$f(x,t) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_{ij}(x,t) \tag{5}$$

[*1] [1] 162p ただし、文中の u = は正しくなく、正しくはここに示したよう に $c0^2$ をかける必要がある。

3.2 u

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{R^3} \delta(c_0(t-s) - |x-\xi|))\frac{1}{t-s}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}f_{ij}(\xi,s)d\xi ds \tag{6}$$

3.3 f 関にする仮定

$$f_{ij}(*,t) \in C_0^\infty(R^3)^{*2}。 \tag{7}$$

3.4 u の変形

3.4.1 その１

超関数の意味での微分の定義（部分積分の拡張）から

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{R^3} \frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\delta(c_0(t-s) - |x-\xi|))\frac{1}{t-s}f_{ij}(\xi,s)d\xi ds \tag{8}$$

ξの微分 x をの微分にとりかえて

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{R^3} \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\delta(c_0(t-s) - |x-\xi|))\frac{1}{t-s}f_{ij}(\xi,s)d\xi ds \\ =& \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{R^3} \delta(c_0(t-s) - |x-\xi|))\frac{1}{t-s}f_{ij}(\xi,s)d\xi ds \end{aligned} \tag{9}$$

3.4.2 その２

さらに、$c_0(t-s) - |x-\xi| = 0$ の拘束があること、（つまり、球面波）を考慮すると。

$$\frac{\partial|x-\xi|}{\partial x_i} = \frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|} \quad \text{および} \quad \frac{\partial|x-\xi|}{\partial t} = \frac{\partial c_0(t-s)}{\partial t} = c_0 \tag{10}$$

から、$|x-\xi|$ の関数に対しては

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial|x-\xi|}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|} \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial|x-\xi|}c_0 \tag{12}$$

従って

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c_0}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|} \sim \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c_0}\frac{x_i}{|x|} \tag{13}$$

上の〜の式は、仮定 $|x| >> |\xi|$ を用いる。この式を使って、$\frac{\partial}{\partial x_i}$を$\frac{\partial}{\partial t}$に入れ替える

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{x_ix_j}{|x|^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{R^3} \delta(c_0(t-s) - |x-\xi|))\frac{1}{t-s}f_{ij}(\xi,s)d\xi ds \tag{14}$$

上に使った仮定を改めて書く

[*2] 変数 x の関数としてコンパクトサポートを持つ無限回微分可能関数の意味、数学的にはこの条件がベスト、物理的にもおそらく有界性は必須

3.5　遠方観測場の仮定

$|x| >> |\xi|$

3.6　音波の物理のイロハ

3.6.1　時間微分は周波数を生む

p $= \Psi(x)exp(i\omega t)$

$\frac{\partial p}{\partial t} = i\omega p$

3.6.2　乱流により生成される音の周波数は渦の回りの速度に依存する。

l を渦の直径、v を乱流速度とすとる $\omega \sim \frac{v}{\pi l}$

3.7　３次元圧力 p の評価－１

$$
\begin{aligned}
\text{式 (14)} =& \frac{1}{c_0^2}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{R^3}\delta(c_0(t-s)-|x-\xi|))\frac{1}{t-s}f_{ij}(\xi,s)d\xi ds \\
=& \frac{1}{c_0^2}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{R^3}\frac{1}{c_0}\delta((t-s)-\frac{|x-\xi|}{c_0}))\frac{1}{t-s}f_{ij}(\xi,s)d\xi ds \\
=& \frac{1}{c_0^2}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\frac{1}{c_0}\frac{c_0}{|x-\xi|}f_{ij}(\xi,t-\frac{|x-\xi|}{c_0})d\xi \\
\sim& \frac{1}{c_0^2}\frac{x_i x_j}{|x|^3}\frac{v^2}{(\pi l)^2}\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}f_{ij}(\xi,t-\frac{|x-\xi|}{c_0})d\xi
\end{aligned}
\tag{15}
$$

3.8　３次元圧力 p の評価－２

$f_{ij} \sim \rho_0 v_i v_j \quad d\xi \sim l^3$ [*3]

$$
\begin{aligned}
\text{式 (15)} \sim& \frac{1}{c_0^2}\frac{x_i x_j}{|x|^3}\frac{v^2}{(\pi l)^2}\frac{1}{4\pi}\rho_0 v_i v_j l^3 \\
\sim& \frac{1}{c_0^2}\frac{1}{|x|}\frac{v^4}{(\pi)^2}\frac{1}{4\pi}\rho_0 l \\
\sim& \frac{1}{c_0^2}\frac{1}{|x|}v^4\rho_0 l
\end{aligned}
\tag{16}
$$

3.9　3dim power

3 次元 $power \equiv \frac{4\pi|x|^2p^2}{\rho_0 c_0} \sim \frac{l^2\rho v^8}{c_0^5}$

*3 [2]34p (2.2.4)

4　２次元

$$u(x,t) = C_0^2 \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^t \int_{V_s} \frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))^2 - |x-\xi|^2)}} f(\xi,s) d\xi ds \tag{17}$$

ここで、$V_s = \{\xi \in R^2 : |x-\xi| < c_0(t-s)\}$

4.1　f(x,t)

$$f(x,t) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_{ij}(x,t) \tag{18}$$

4.2　u

$$u(x,t) = C_0^2 \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^t \int_{V_s} \frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))^2 - |x-\xi|^2)}} \frac{\partial^2}{\partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j}} f_{ij}(\xi,s) d\xi ds \tag{19}$$

4.3　f **関にする仮定**

$$f_{ij}(*,t) \in C_0^\infty(R^2)^{*4}。 \tag{20}$$

4.4　u **の変形**

4.4.1　**その１**

超関数の意味での微分の定義（部分積分の拡張）から

$$u(x,t) = C_0^2 \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^t \int_{V_s} \frac{\partial^2}{\partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j}} \frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))^2 - |x-\xi|^2)}} f_{ij}(\xi,s) d\xi ds \tag{21}$$

ξの微分 x をの微分にとりかえて

$$\begin{aligned} u(x,t) &= C_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{V_s} \frac{\partial^2}{\partial_{x_i} \partial_{x_j}} \frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))^2 - |x-\xi|^2)}} f_{ij}(\xi,s) d\xi ds \\ u(x,t) &= C_0 \frac{\partial^2}{\partial_{x_i} \partial_{x_j}} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{V_s} \frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))^2 - |x-\xi|^2)}} f_{ij}(\xi,s) d\xi ds \end{aligned} \tag{22}$$

---

*4 変数 x の関数としてコンパクトサポートを持つ無限回微分可能関数の意味、数学的にはこの条件がベスト、物理的にもおそらく有界性は必須

4.4.2 その2

さらに、$c_0(t-s)-|x-\xi|=0$ が最も積分値に影響を与えることを考慮すると。

$$\frac{\partial|x-\xi|}{\partial x_i}=\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|} \quad \text{および} \quad \frac{\partial|x-\xi|}{\partial t}=\frac{\partial c_0(t-s)}{\partial t}=c_0 \tag{23}$$

から、$|x-\xi|$ の関数に対しては

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial|x-\xi|}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|} \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial|x-\xi|}c_0 \tag{25}$$

従って

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c_0}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|}\sim\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c_0}\frac{x_i}{|x|} \tag{26}$$

上の〜の式は、仮定 $|x|>>|\xi|$ を用いる。この式を使って、$\frac{\partial}{\partial x_i}$ を $\frac{\partial}{\partial t}$ に入れ替える

$$u(x,t)=C_0\frac{1}{c_0^2}\frac{x_ix_j}{|x|^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{V_s}\frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))^2-|x-\xi|^2)}}f_{ij}(\xi,s)d\xi ds \tag{27}$$

上に使った仮定を改めて書く

4.5 遠方観測場の仮定

$|x|>>|\xi|$

4.6 音波の物理のイロハ

4.6.1 時間微分は周波数を生む

$\mathrm{p}=\Psi(x)exp(i\omega t)$

$\frac{\partial p}{\partial t}=i\omega p$

4.6.2 乱流により生成される音の周波数は渦の回りの速度に依存する。

l を渦の直径、v を乱流速度とすとる $\omega\sim\frac{v}{\pi l}$

4.7 積分領域の変換

$V_s=\{\xi\in R^2:|x-\xi|\leq c_0(t-s)\}$

$\cup_{0\leq s\leq t}\{V_s,s\}=\cup_{\{|\xi-x|\leq c_0t\}}\{\xi,[0,t-\frac{|\xi-x|}{c_0}]\}$

これを用いて 27 の積分順序を書き換える。

$$u(x,t)=C_0\frac{1}{c_0^2}\frac{x_ix_j}{|x|^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-x|\leq c_0t}\int_0^{t-\frac{|\xi-x|}{c_0}}\frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))^2-|x-\xi|^2)}}f_{ij}(\xi,s)dsd\xi \tag{28}$$

4.8　遠方場を用いて被積分関数の近似

遠方場 $|x| >> |\xi|$ を用いて 被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))^2-|x-\xi|^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c_0(t-s)+|x-\xi|}\sqrt{(c_0(t-s))-|x-\xi|)}}$
$\sim \frac{1}{\sqrt{2|x-\xi|}\sqrt{(c_0(t-s))-|x-\xi|)}}$
従って、29 は

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= C_0\frac{1}{c_0^2}\frac{x_ix_j}{|x|^2}\frac{1}{\sqrt{2|x|}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-x|\le c_0t}\int_0^{t-\frac{|\xi-x|}{c_0}}\frac{1}{\sqrt{(c_0(t-s))-|x-\xi|)}}f_{ij}(\xi,s)dsd\xi \\
\tau &\equiv (c_0(t-s))-|x-\xi| \\
u(x,t) &= \frac{1}{c_0^2}\frac{x_ix_j}{|x|^2}\frac{1}{\sqrt{2|x|}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-x|\le c_0t}\int_0^{c_ot-|x-\xi|}\frac{1}{\sqrt{\tau}}f_{ij}(\xi,s)d\tau d\xi \\
&\sim \frac{1}{c_0^2}\frac{x_ix_j}{|x|^2}\frac{1}{\sqrt{2|x|}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-x|\le c_0t}2\sqrt{c_0t-|x-\xi|}\rho_0v_iv_jd\xi \\
&\sim \frac{1}{c_0^2}\frac{1}{\sqrt{2|x|}}(\frac{v^2}{(l\pi)^2})\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-x|\le c_0t}2\sqrt{c_0(t-\frac{|x-\xi|}{c_0}})\rho_0v_iv_jd\xi
\end{aligned} \tag{29}$$

4.9　音響物理的考察から

$t-\frac{|x-\xi|}{c_0}\sim\frac{l}{v}$
the radiation from an eddy of dimension l is coherent over times l/v
および、$\int d\xi = l^2$故

4.10　2dim p

[*5]

$$p \sim \frac{1}{c_0\sqrt{c_0}}\rho_0 v^{4-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{l}{|x|}} \tag{30}$$

4.11　2dim power

2 次元 $power \equiv \frac{2\pi|x|p^2}{\rho_0c_0} \sim \frac{l\rho v^7}{c_0^4}$

参考文献

[1] 俣野博、神保道夫　熱・波動と微分方程式、岩波（2004）

[2] M.S.Howe 空力音響学　渦音の理論　浅井雅人・稲澤歩　訳　共立出版 (2015).

[3] M.S.Howe Acoustics of Fluid-Structure Interactions Cambridge (1998)

[*5] [3]108p