

2次曲面上の測地線とブラウン運動(式の導出とプログラム)

大野泰治郎^{*1}

目次

1	対象とするモデル	2
1.1	Sphere Model(Sphere)	3
1.2	Hyperbolic Plane Model (H2)	3
1.3	Negative Curvature Model (NC)	4
2	第1基本量	4
2.1	Sphere Model (Sphere)	5
2.2	Hyperbolic Plane Model (H2))	5
2.3	Negative Curvature Model (NC)	5
3	接続係数	6
3.1	Sphere Model (Sphere)	6
3.2	Hyperbolic Plane Model (H2))	7
3.3	Negative Curvature Model (NC)	7
4	測地線の方程式	7
4.1	Sphere Model (Sphere)	8
4.2	Hyperbolic Plane Model (H2))	8
4.3	Negative Curvature Model (NC)	8
5	測地線の実装	9
5.1	Sphere Model	9
5.2	Hyperbolic Plane Model (H2))	11
5.3	Negative Curvature Model (NC)	12
6	第2基本量	14
6.1	Sphere Model	14
6.2	Hyperbolic Plane Model (H2))	14
6.3	Negative Curvature Model (NC)	15
7	曲率	15

^{*1} 1950年生まれ、鹿児島大学数学科大阪市立大学修士京都大学理学部博士を経て、情報数理研究所に入社、在学時代の専攻は、エルゴード理論、会社時代は、人工知能および人工衛星 TERRA に搭載された ASTER センサーの運用プログラムの開発などを担当、退職後、コンピュータと数学との間の諸問題をランダムに追跡

7.1	Sphere Model (Sphere)	15
7.2	Hyperbolic Plane Model (H2))	16
7.3	Negative Curvature Model (NC)	16
8	ベクトル演算と微分形式	16
8.1	勾配	17
8.2	回転	18
8.3	発散	18
8.4	laplacian	19
8.5	Laplace Beltrami operator	20
9	リーマン空間上のブラウン運動	20
9.1	定式化	20
9.2	ブラウン運動の構成	21
10	ブラウン運動の実装	21
10.1	Sphere モデル	22
10.2	Hyperbolic Model	23
10.3	NC-Model	23
付録 A	sphere モデルの測地線が大円となること	24
付録 B	$\frac{1}{\partial_i} \wedge \frac{1}{\partial_j} = \frac{2}{[\partial_i, \partial_j]}$	25
付録 C	トーラスモデル	26
C.1	第一基本量	26
C.2	接続係数	27
C.3	ヘシアン	27
C.4	曲率	27
C.5	測地線	28
C.6	ブラウン運動	28
付録 D	Sphere Model XY-座標	28
D.1	第一基本量	28
D.2	接続係数	29
D.3	ブラウン運動	29
付録 E	SphereModel 上のブラウン運動 (モデルからの座標変換)	30

1 対象とするモデル

次の3曲面($f : R^2 \rightarrow R^3$)が対象とするモデルである。

1.1 Sphere Model(Sphere)

2次元球面を極座標で表示したもの。半径 r は固定とする。

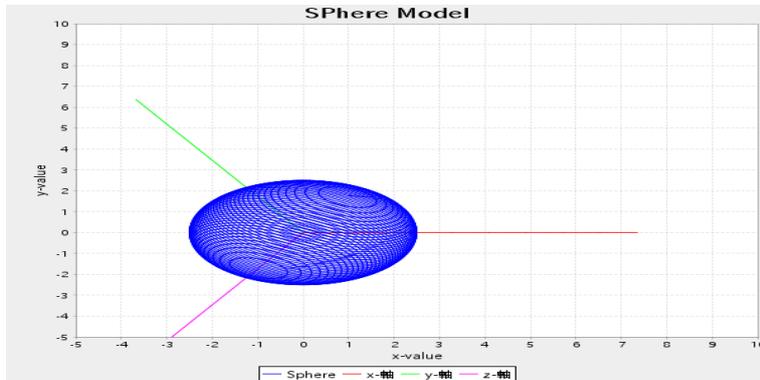


図1 sphere model

$$f(\theta, \phi) = (r * \sin \theta * \cos \phi, r * \sin \theta * \sin \phi, r * \cos \theta) \quad (1)$$

r は正の定数、 θ 、 ϕ は正値 (>0) を取る。 θ 、 ϕ のとり方は、図(2)を参照
掛け算を表す * は以後、特にわかりにくい場合以外は、省略する。

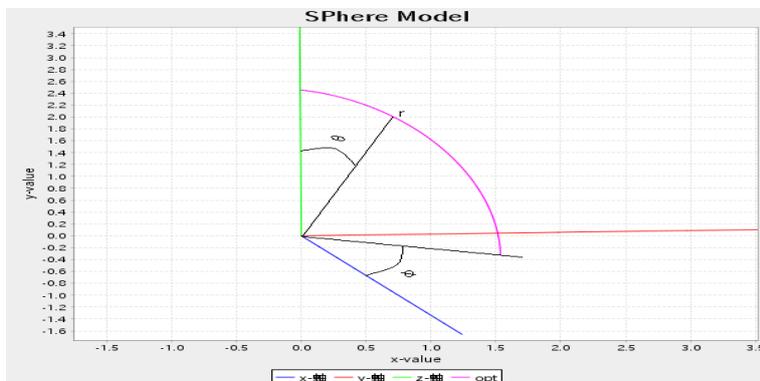


図2 sphere モデルにおける θ 、 ϕ のとりかた

1.2 Hyperbolic Plane Model (H2)

$$f(u^1, u^2) = (\exp(-u^1) \cos(u^2), \exp(-u^1) \sin(u^2), \int_0^{u^1} \sqrt{1 - e^{-2t}} dt)$$

z 値の積分を計算すると $-\log(e^{u^1} - \sqrt{e^{2u^1} - 1}) - \sqrt{1 - e^{-2u^1}}$ となる。 u^2 を u 、 e^{u^1} を v とおいて書き直し、次の式 (H2 モデル) を得る。

$$f(u, v) = \left(\frac{1}{v} \cos u, \frac{1}{v} \sin u, -\log(v - \sqrt{v^2 - 1}) - \sqrt{1 - v^{-2}} \right) \quad (2)$$

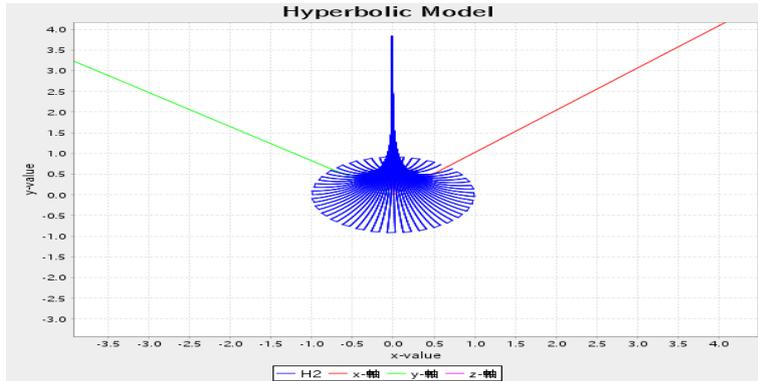


図3 hyperbolic plane

u は範囲制限なし、 v に関しては $v > 1$ である。このモデルは双曲平面（ロバチェフスキー平面（アーノルド [1, 付録 22]））をユークリッド空間に埋め込んだ曲面である。上の双曲平面全体をユークリッド空間内で実現することはできない。（ヒルベルトの定理（小林 [3, pp. 33–35]））実際この例でも $v > 1$ の制限がつく。

1.3 Negative Curvature Model (NC)

H2 モデルのように、負曲率を持つ非ユークリッド曲面全体はユークリッド空間内で実現できないか、というとなんかそう簡単にはなく、その簡単な例を与えたモデルである。

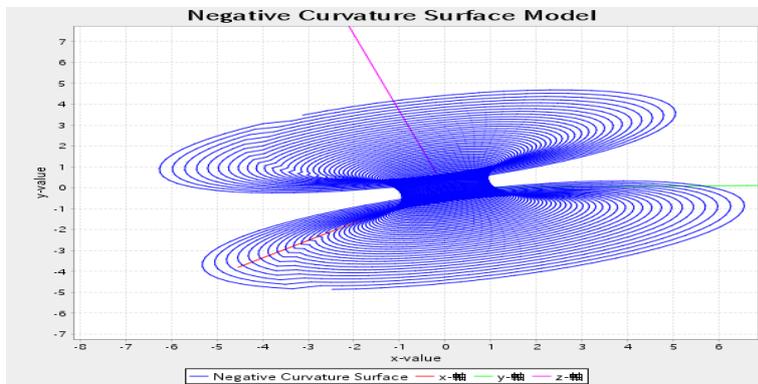


図4 negative curvature model

次の式であたえられる。

$$f(u^1, u^2) = (h(u^1)\cos u^2, h(u^1)\sin u^2, u^1) \quad (3)$$

ここで、 $h(u)$ は、双曲線関数 $\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ のこと。 u^1, u^2 に制限はない。

2 第1基本量

各モデルでの第1基本量を計算する。

このセクション以降では、 $f_{,i}$ で関数 f の変数 $u^i(x^i)$ による偏微分 $\frac{\partial f}{\partial u^i}$ ($\frac{\partial f}{\partial x^i}$) を表す。同様に、 $f_{,j}$ で関数 f の変数 $u^j(x^j)$ による偏微分 $\frac{\partial f}{\partial u^j}$ ($\frac{\partial f}{\partial x^j}$) を表す。第1基本量を表す g_{ij} 、 g 等は、 $f_{,i}$ と $f_{,j}$ 、および $f_{,i}$ と $f_{,j}$ の R^3 での普通の

意味での内積のことである。

G をその i 行 j 列の成分が g_{ij} である行列とする。 g をその行列 G の行列式、および g^{ij} を逆行列 G^{-1} の i 行 j 列の成分とする。

2.1 Sphere Model (Sphere)

式 (1) の Sphere Model の定義式 $f(u, v)$ を (u, v) で微分して、

$$\begin{aligned} f_{,u} &= (r \cos v \cos u, r \cos v \sin u, -r \sin v) \\ f_{,v} &= (-r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, 0) \end{aligned}$$

従って、 $g_{11} = f_{,u} \cdot f_{,u} = r^2$, 同様に、 $g_{22} = f_{,v} \cdot f_{,v} = r^2 \sin^2 v$ を得る。
従って、

$$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 v \end{pmatrix}$$

$g = G$ の行列式 $= r^4 \sin^2 v$

および

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} r^{-2} & 0 \\ 0 & r^{-2} \sin^{-2} v \end{pmatrix}$$

($\sin v \neq 0$ の条件のもと) となる。

2.2 Hyperbolic Plane Model (H2)

式 (2) の H2 Model の定義式 $f(u, v)$ を (u, v) で微分して、

$$\begin{aligned} f_{,u} &= \left(-\frac{1}{v} \sin u, \frac{1}{v} \cos u, 0 \right) \\ f_{,v} &= \left(-\frac{1}{v^2} \cos u, -\frac{1}{v^2} \sin u, \frac{1}{v} \sqrt{1-v^2} \right) \end{aligned}$$

を得る。従って、その第 1 基本量と g および逆行列は、

$$\begin{aligned} g_{11} &= f_{,u} \cdot f_{,u} = \frac{1}{v^2}, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = \frac{1}{v^2} \\ G &= \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$g = G$ の行列式 $= v^{-4}$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix}$$

となる。

2.3 Negative Curvature Model (NC)

式 (3) の NC Model の定義式 $f(u^1, u^2)$ を u^1, u^2 で微分して、

$$\begin{aligned} f_{,1} &= (\sinh(u^1) \cos u^2, \sinh(u^1) \sin u^2, 1), \sinh(u) = (e^u - e^{-u})/2 \text{ のこと。} \\ f_{,2} &= (-h(u^1) \sin u^2, h(u^1) \cos u^2, 0) \end{aligned}$$

従って、 $g_{11} = f_{,1} \cdot f_{,1} = \sinh^2(u^1) + 1 = h^2, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = h^2$ つまり、

$$G = \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

$g = G$ の行列式 $= h^4$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} h^{-2} & 0 \\ 0 & h^{-2} \end{pmatrix}$$

ここで、 $h = h(u^1) = \cosh u^1 = \frac{e^{u^1} + e^{-u^1}}{2}$

3 接続係数

各モデルでの接続係数を計算する。

このセクション以降では、

$f_{,ij}$ で関数 f の変数 u^i, u^j (または、 x^i, x^j) による偏微分 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$ (または $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$) を表す。

同様に、

$f_{,ij}$ で関数 f の x^i, x^j による偏微分 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ を表す。

接続係数を表す ${}^k_{ij}$ は、ベクトル $f_{,ij}$ の $f_{,k}$ 成分を表すスカラー量 (通常の (実) 数値、ベクトルでないことを強調するとき用いる) である。ここでのモデルのように 3 次元内の 2 次元曲面では、 $f_{,i}$ をベクトル $\{f_{,1}, f_{,2}, \dots\}$ の法線ベクトル ($i = 1, 2$ の場合は、 $f_{,1}, f_{,2}$ と直交し、かつ $f_{,1}, f_{,2}, f_{,i}$ が右手系となるような、長さ $\|f_{,i}\| = 1$ のベクトル) としたときに

$$f_{,ij} = {}^k_{ij} f_{,k} + h_{ij} \quad (4)$$

と表すことができる。

この時、 ${}^k_{ij}$ はベクトル $f_{,k}$ の係数として与えられる。ここで、 ${}^k_{ij} f_{,k}$ は、アインシュタイン規則 (添え数が上下にわかれた時は、その添え数に関する和をとる) を用いている。上の例では、 ${}^k_{ij} f_{,k}$ を意味する。また h_{ij} は後のセクションで、ヘシアン (第 2 基本量) として定義されるスカラー量である。

上で使用したアインシュタイン規則はこのセクション以降、特に断らない限り用いる。(分かりづらい場合は、断ったうえで ∂ 記号を用いることにする。)

接続係数の計算には、次の式を用いる。この式の導出は、第 1 基本量を微分すると、2 次微分が現れることを考慮して、 $g_{ij,l}$ ($l = i, j, k$) を計算してみればよい。

$${}^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \{ -g_{ij,l} + g_{j,l} + g_{i,l} \} \quad (5)$$

3.1 Sphere Model (Sphere)

Sphere Model の第 1 基本量を用いて、式 (5) を計算する。

$$\begin{aligned} g_{11} &= 0, & g_{12} &= 0, & g_{22} &= 0, & g_{1,1} &= -\sin^2 \theta \cos^2 \phi, \\ g_{1,2} &= 0, & g_{2,1} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, & g_{2,2} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, & g_{2,3} &= 0, \end{aligned}$$

(上の式が有効なのは $\sin \theta \neq 0$ の条件の下である。)

3.2 Hyperbolic Plane Model (H2))

H2 Model の第 1 基本量を用いて、式 (5) を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{u}{uu} &= 0, & \frac{u}{uv} &= -1/v, & \frac{u}{vu} &= -1/v, & \frac{u}{vv} &= 0, \\ \frac{v}{uu} &= 1/v, & \frac{v}{uv} &= 0, & \frac{v}{vu} &= 0, & \frac{v}{vv} &= -1/v \end{aligned}$$

3.3 Negative Curvature Model (NC)

NC Model の第 1 基本量を用いて、式 (5) を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} &= \tanh(u^1), & \frac{1}{12} &= 0, & \frac{1}{21} &= 0, & \frac{1}{22} &= -\tanh(u^1), \\ \frac{2}{11} &= 0, & \frac{2}{12} &= \tanh(u^1), & \frac{2}{21} &= \tanh(u^1), & \frac{2}{22} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、

$$\tanh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

4 測地線の方程式

各モデルでの測地線を計算する。

$U \subset R^2$ 上に座標 (x^i) が与えられているとし、 $f : U \rightarrow R^3$ を曲面を与える関数とする。

曲面上の曲線を $(t) = f(x^i(t))$ と置くと、 f 曲面上の測地線であるとは、次の方程式をみたすことである。

$$proj_{(t)} \ddot{} = 0 \tag{6}$$

ここで、 $\ddot{} = \frac{d^2}{dt^2}$ 、 $proj_p$ は、曲面上の点 p での $f_{,i}$ で張る接平面への射影を意味する。故に

$$\begin{aligned} \dot{} &= f, \quad \dot{x} \\ \ddot{} &= f_{,i} \dot{x}^i + f_{,k} \ddot{x}^k = ({}^k f_{,k} + h) \dot{x}^i + f_{,k} \ddot{x}^k \end{aligned}$$

従って、測地線の方程式は、

$$proj_{(t)} \ddot{} = ({}^k \dot{x}^i \dot{x}^j + \ddot{x}^k) f_{,k} = 0 \text{ が成立することである。}$$

つまり、任意の k に対して

$${}^k \dot{x}^i \dot{x}^j + \ddot{x}^k = 0 \tag{7}$$

となる。

また式 (6) から

$$\frac{d}{dt}(\dot{} \cdot \dot{}) = 2 \ddot{} \cdot \dot{} = 0$$

なので、

$$g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \text{定数}$$

とくに、 θ のパラメータ t を r の長さにとって、定数 = 1 と考えてよい。(これは、測地線に限った話ではない。) つまり、

$$g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1 \quad (8)$$

以下各モデルに対して式 (7)、式 (8) を計算する。

4.1 Sphere Model (Sphere)

セクション 3.1 の Sphere Model の接続係数を用いて、式 (7) を計算する。ただし $\sin \theta \neq 0$ とする。 x^k として θ, ϕ をとると、

$$\begin{aligned} (\ddot{\theta})^2 + \ddot{\phi}^2 &= 0 \\ \dot{\theta} \ddot{\theta} + \dot{\phi} \ddot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

接続係数に具体的な値を代入して

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \sin \theta \cos \theta (\dot{\phi})^2 \\ \ddot{\phi} = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\phi} \end{cases} \quad (9)$$

また、式 (8) を計算すると

$$r^2 (\dot{\theta})^2 + r^2 \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2 = 1 \quad (10)$$

4.2 Hyperbolic Plane Model (H2))

セクション 3.2 の H2 Model の接続係数を用いて、式 (7) を計算する。 x^k として u, v をとると、

$$\begin{aligned} 2 \frac{u}{v} (\dot{u})(\dot{v}) + \ddot{u} &= 0 \\ \frac{v}{uu} (\dot{u})^2 + \frac{v}{vv} (\dot{v})^2 &= 0 \end{aligned}$$

接続係数に具体的な値をいれて計算すると

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{2}{v} \dot{u} \dot{v} \\ \ddot{v} = -\frac{1}{v} (\dot{u})^2 + \frac{1}{v} (\dot{v})^2 \end{cases} \quad (11)$$

また、式 (8) を計算すると

$$\frac{(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2}{v^2} = 1 \quad (12)$$

4.3 Negative Curvature Model (NC)

セクション 3.3 の NC Model の接続係数を用いて、式 (7) を計算する。 x^k として u^1, u^2 をとると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} (\dot{u}^1)^2 + \frac{1}{22} (\dot{u}^2)^2 + \ddot{u}^1 &= 0 \\ 2 \frac{2}{12} (\dot{u}^1)(\dot{u}^2) + \ddot{u}^2 &= 0 \end{aligned}$$

接続係数に具体的な値をいれて計算すると

$$\begin{cases} \tanh(u^1)(\dot{u}^1)^2 - \tanh(u^1)(\dot{u}^2)^2 + \ddot{u}^1 = 0 \\ 2\tanh(u^1)\dot{u}^1\dot{u}^2 + \ddot{u}^2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

また、式 (8) を計算すると

$$h^2(u^1)((\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2) = 1 \quad (14)$$

5 測地線の実装

5.1 Sphere Model

sphere モデルの測地線はよく知られているように大円である (付録 A) が、ここでは測地線の方程式 ($\dot{u}^1 \neq 0$ または、 $\dot{u}^2 = 0$ を前提とする) から直接実装する。 $\dot{u}^1 = 0$ (case 1)、 $\dot{u}^2 = 0$ (case 2)、 $\dot{u}^1 \neq 0$ かつ $\dot{u}^2 \neq 0$ (case 3) に分けて行う。

case 1 $\dot{u}^2 = 0$ なので、 u^2 は定数 (u^2_0)、式 (10) より $\dot{u}^1 \sin u^1 \neq 0$ なので式 (9) より、 $\cos u^1 = 0$ でないといけない。

従って、 $u^1 = \frac{\pi}{2}$ および式 (10) より $\dot{u}^1 = \pm \frac{1}{r}$

$$\begin{cases} u^1 = \frac{\pi}{2} \\ u^2 = \frac{1}{r}t + u^2_0 \end{cases} \quad (15)$$

を実装する。この曲線は $(x,y,z)=(r,0,0),(0,r,0)$ を通る (この球面を地球にみなすと、赤道を表す) 大円である。

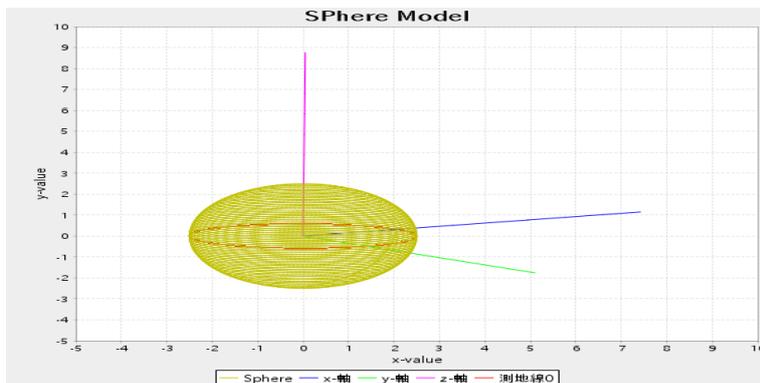


図 5 Geodesics case 1(Sphere)

case 2

case 1 と同様に、 u^1 の初期値 u^1_0 、 u^2 の初期値 u^2_0 として、

$$\begin{cases} u^1 = \frac{1}{r}t + u^1_0 \\ u^2 = u^2_0 \end{cases} \quad (16)$$

が式 (9) を満たす。

この曲線は頂点 (0,0,r) を通る大円である。

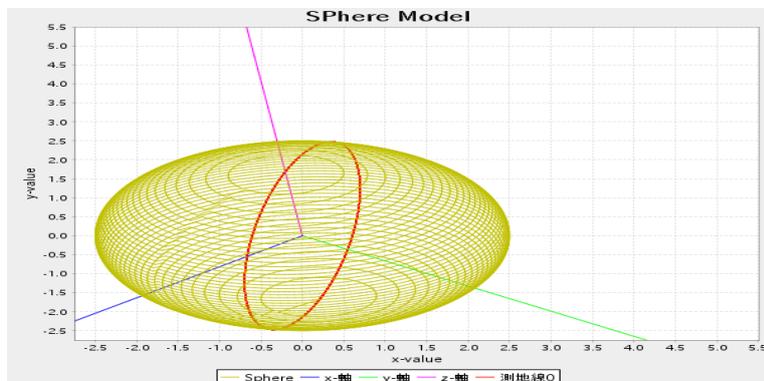


図 6 Geodesics case 2(Sphere)

case 3

式 (9) の第 2 式を次のように展開していく。

$$\ddot{\theta} = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta}^2$$

⇒

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta}$$

⇒

$$\frac{d \log \dot{\theta}}{dt} = -2 \frac{d (\log \sin \theta)}{dt}$$

従って、

C を任意の定数として、

$$\dot{\theta} = \frac{e^C}{\sin^2 \theta}$$

がしめせる。

$$\text{上の式を式 (10) に代入して、} (\dot{r})^2 = r^{-2} - \sin^{-2} \theta e^{2C}$$

上式を書き直すと、

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{e^C}{\sin^2 \theta} \\ \dot{r} = \pm \sqrt{r^{-2} - \sin^{-2} \theta e^{2C}} \end{cases} \quad (17)$$

この式 (17) をオイラー法でプログラムする。± の符号のとりかたは、 $(r^{-2} - \sin^{-2} \theta e^{2C})$ が正値をたもつようにプログラム内で反転させる。

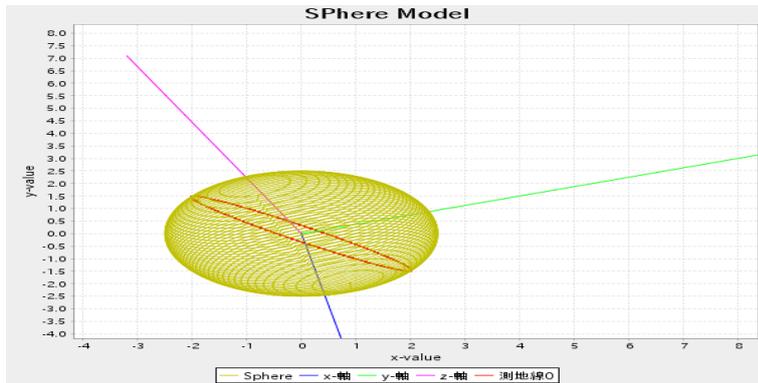


図 7 Geodesics case 3(Sphere)

5.2 Hyperbolic Plane Model (H2)

$v = e^{u^1}, u^1 > 0$. であったので、 $v > 1$ が変数 v に関する条件である。

u に関しては、本質的な制限はない。

$\dot{u} = 0$ (case1) と $\dot{u} \neq 0$ (case2) に分けて考える。case 1 からは (u, v) 座標での半直線が、case 2 からは同じく (u, v) 座標での半円弧が測地線となることが分かる。

case 1 $\dot{u} = 0$

この場合式 (12) を用いて、

$$(\dot{v}/v)^2 = 1$$

上式は、 $d \log v = \pm dt$ 従って、 c を任意の定数として、 $v(t) = e^{\pm t} c$ および、 $u(t) = c$ である。± の符号のとりかたおよび、時間 t の範囲は、ともに $v > 1$ を満たすようにとる。 e を再び c とおいて、

$$\begin{cases} v = e^t, u = c & (t \in (-\log c, \infty)) \\ v = e^{-t}, u = c & (t \in (-\infty, \log c)) \end{cases}$$

$c > 0$, c は任意の実数。

case 2 $\dot{u} \neq 0$

式 (11) を用いて、 $\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = 2 \frac{\dot{v}}{v} \Rightarrow d \log \dot{u} = 2 d \log v \Rightarrow \dot{u} = e^{2v} c$ (c は任意定数)、また式 (12) の両辺に、 $\frac{v^2}{(\dot{u})^2}$ を掛けて

$$1 + \frac{\dot{v}^2}{\dot{u}^2} = v^2 / \dot{u}^2$$

従って、

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = v^2 / \dot{u}^2 - 1 = e^{-2v} / v^2 - 1 = \frac{e^{-2v} - v^2}{v^2}$$

つまり、

$$du = \pm v \frac{1}{\sqrt{e^{-2v} - v^2}} dv$$

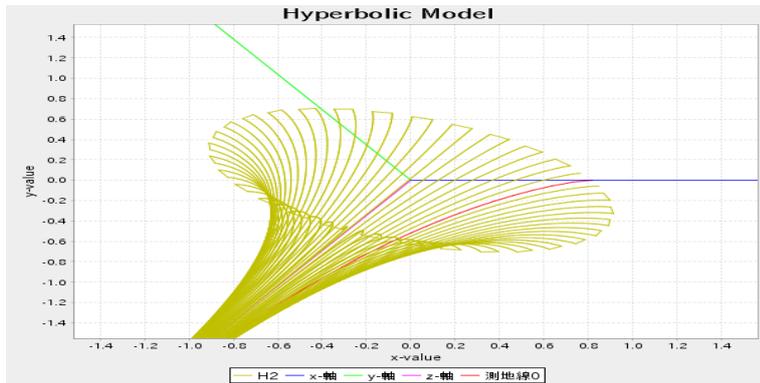


図 8 Geodesics case 1(H2)

右辺は積分できて、結局

$$u = \mp \sqrt{e^{-2} - v^2} +$$

両辺二乗して

$$(u -)^2 + v^2 = e^{-2} , \text{ただし、} v > 1、 \text{、 } \text{は任意の定数}$$

が測地線となる。

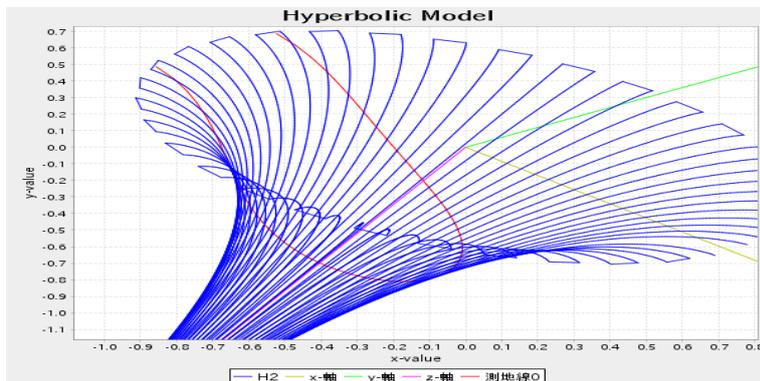


図 9 Geodesics case 2(H2)

5.3 Negative Curvature Model (NC)

$\dot{u}^2 = 0$ (case 1) と $\dot{u}^2 \neq 0$ (case 2) に分けて考える。

case 1 $\dot{u}^2 = 0$

この場合は u^2 は定数である。一方、式 (14) を用いて、

$$(\dot{u}^1)^2 = h(u^1)^{-2}, h(u) = \cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

従って、

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = \pm \frac{2}{e^{u^1} + e^{-u^1}} \\ u^2 = \text{、 } \text{は任意の定数} \end{cases}$$

となり、これを差分 (オイラー法) を用いて実装する。

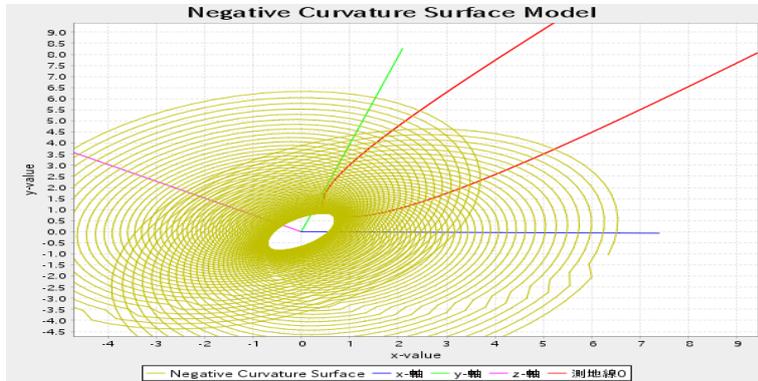


図 10 Geodesics case 1(NC)

case 2 $\dot{u}^2 \neq 0$

式 (13) の第 2 式を用いて、 $\frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^2} = -2\tanh(u^1)\dot{u}^1$

⇒

$$d \log \dot{u}^2 = -2\tanh(u^1)\dot{u}^1$$

なので、

$$\log \dot{u}^2 = \int -2\tanh(u^1)du^1 + C_2 \text{ (定数)}$$

右辺は積分できて、

$$\log \dot{u}^2 = \log \cosh(u^1)^{-2} + C_2$$

結局

$$\dot{u}^2 = \frac{e^{C_2}}{\cosh(u^1)^2} = \frac{e^{C_2}}{h(u^1)^2}$$

これを式 (14) に代入して、

$$h^2(u^1)((\dot{u}^1)^2) + \frac{e^{2C_2}}{h(u^1)^2} = 1$$

従って、

$$\dot{u}^1 = \pm \frac{1}{h} \sqrt{1 - \frac{e^{2C_2}}{h^2}}$$

つまり、この case 2 での測地線の満たすべき方程式は

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = \pm \frac{1}{h} \sqrt{1 - \frac{e^{2C_2}}{h^2}} \\ \dot{u}^2 = \frac{e^{C_2}}{h^2} \end{cases}$$

となる。ここで、 $h = \cosh(u^1)$ 、 C_2 は $h > e^{C_2}$ を満たすようにとる。この式を差分 (オイラー法) して、実装する。

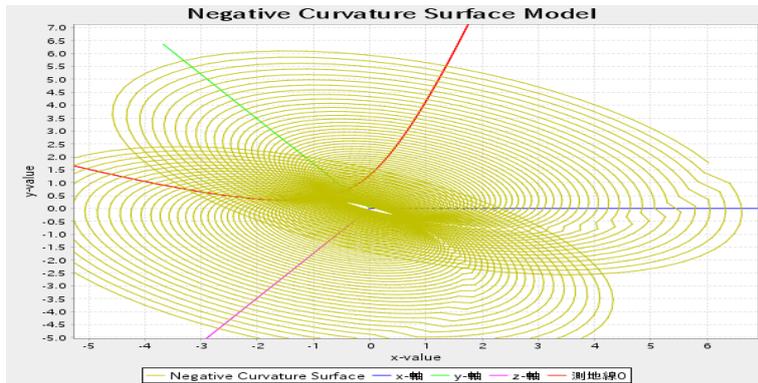


図 11 Geodesics case 2(NC)

6 第 2 基本量

$$f_{,ij} = \sum_k f_{,ik} h_{kj} + h_{ij}$$

であった。はベクトル $f_{,1}$ と $f_{,2}$ の外積 $f_{,1} \times f_{,2}$ ($[f_{,1}, f_{,2}]$ とも書く) を用いて $= \frac{f_{,1} \times f_{,2}}{\|f_{,1} \times f_{,2}\|}$ と表現できる。この時の $h_{ij} = f_{,ij} \cdot$ をヘシアン (第 2 基本量) とよぶ。定義から $h_{ij} = h_{ji}$ が分かる。各モデルでの値を計算する。

6.1 Sphere Model

$$f_{,1} \times f_{,2} = (r^2 \sin^2 \theta \cos \phi, r^2 \sin^2 \theta \sin \phi, r^2 \sin \theta \cos \theta)$$

従って、

$$= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

各 h_{ij} は、

$$h_{11} = -r, h_{12} = h_{21} = 0, h_{22} = -r \sin^2 \theta$$

で与えられる。

6.2 Hyperbolic Plane Model (H2)

$$f_{,u} \times f_{,v} = \left(\frac{1}{v^2} \cos u \sqrt{1-v^2}, \frac{1}{v^2} \sin u \sqrt{1-v^2}, \frac{1}{v^3} \right)$$

従って、

$$= \left(\cos u \sqrt{1-v^2}, \sin u \sqrt{1-v^2}, \frac{1}{v} \right)$$

$$h_{uu} = -\frac{1}{v} \sqrt{1-v^2}, h_{uv} = h_{vu} = 0, h_{vv} = \frac{1}{v^3} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

6.3 Negative Curvature Model (NC)

$$f, 1 \times f, 2 = (-h(u^1)\cos u^2, -h(u^1)\sin u^2, h(u^1)\sinh(u^1))$$

従って、

$$= \frac{1}{h(u^1)}(-\cos u^2, -\sin u^2, \sinh(u^1))$$

$$h_{11} = -1, h_{12} = h_{21} = 0, h_{22} = 1$$

7 曲率

曲面 $f(u^1, u^2)$ とその上に値をとる $(t) = f(u^1(t), u^2(t))$ で、時間パラメータ t を弧長でとった (即ち、 $\|\dot{\cdot}\|^2 = 1$) 曲線を考える。

$u_0^i = u^i(0)$ として、曲線の点 $f(u_0^1, u_0^2)$ での曲率とは $\ddot{\cdot}(t) \cdot \big|_{t=0}$ のことである。は前セクションで定義された曲面 f の点 $f(u^1(0), u^2(0))$ での単位法線ベクトル $\frac{f,1 \times f,2}{\|f,1 \times f,2\|}$ である。

曲面 f の点 $f(u_0^1, u_0^2)$ でのガウス曲率、平均曲率とは、 $f(u_0^1, u_0^2)$ を固定して、 \dot{u}^i を動かした時に得られる曲率の極大値、極小値の積、平均のことをいう。前節のヘシアン (第2基本量) を用いて、

$$\ddot{\cdot}(t) \cdot = h_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \quad (18)$$

となる。行列 $G=(g_{ij})$ 、行列 $H=(h_{ij})$ 、および G は対称な非負定値行列なので、 $G=\sqrt{G^t} \sqrt{G}$ とかけて、式 (18) を行列表現すると、

$$\ddot{\cdot}(t) \cdot = (\sqrt{G}u)^t (\sqrt{G^t})^{-1} H (\sqrt{G})^{-1} (\sqrt{G}u), \text{ ここで } u = (\dot{u}^i)$$

となる。

一方 $\|\dot{\cdot}\|^2 = 1$ から $g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = 1$ となるので、 $v = (\sqrt{G}(\dot{u}^i))$ とおくと $\|v\| = 1$ である。上式を書き直すと、

$$\ddot{\cdot}(t) \cdot = v^t (\sqrt{G^t})^{-1} H (\sqrt{G})^{-1} v, v \text{ は } \|v\| = 1 \text{ を満たす任意のベクトルをとる。}$$

となる。

つまり、行列 $K=(\sqrt{G^t})^{-1} H (\sqrt{G})^{-1}$ を考えると、 K の固有値が曲率の最大値、最小値を与えることになる。従って、曲面 f の (u_0^1, u_0^2) 上での Gauss 曲率は、 K の行列式 ($\det K$)、平均曲率はトレース ($\text{tr } K$)^{*2} を2分の1とした値となる。

7.1 Sphere Model (Sphere)

$$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2 \end{pmatrix}$$

*2 $\text{tr}(ABC) = a_j^i b_k^j c_i^k = b_k^j c_i^k a_j^i = \text{tr}(BCA)$ 故 $\text{tr } K = \text{tr } H G^{-1} = g^{ij} h_{ij}$

従って、

$$K = \begin{pmatrix} -r^{-1} & 0 \\ 0 & -r^{-1} \end{pmatrix} \begin{cases} \text{ガウス曲率} = \det K = r^{-2} \\ \text{平均曲率} = -r^{-1} \end{cases}$$

である。

7.2 Hyperbolic Plane Model (H2))

$$G = \begin{pmatrix} v^{-2} & 0 \\ 0 & v^{-2} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1-v^{-2}}}{v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^3\sqrt{1-v^{-2}}} \end{pmatrix}$$

従って、

$$K = \begin{pmatrix} -\sqrt{v^2-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \end{pmatrix} \begin{cases} \text{ガウス曲率} = \det K = -1 \\ \text{平均曲率} = \frac{2-v^2}{2\sqrt{v^2-1}} \end{cases}$$

である。

7.3 Negative Curvature Model (NC)

$$G = \begin{pmatrix} h^2(u^1) & 0 \\ 0 & h^2(u^1) \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

従って、

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h^2(u^1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2(u^1)} \end{pmatrix} \begin{cases} \text{ガウス曲率} = \det K = -h^{-4}(u^1) \\ \text{平均曲率} = 0 \end{cases}$$

である。

8 ベクトル演算と微分形式

この節では、後で用いるベクトル演算 grad、rot、div を一般座標系の元で与える。この節を通して、U はリーマン多様体 M の開集合とし、 $x \in U$, x 上の接平面 $T_x(M)$ 、接バンドル $\cup T_x(M) = T(M)$ 、U 上に座標 (x^1, x^2, \dots, x^d) および T(M) 上に第 1 基本量 $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$ が与えられているものとし、T(M) の双対空間 $T^*(M)$ その基底 dx^i が $dx^i(\partial_j) =$

$$ij = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

で与えられているものとする。 $T^*(M)$ の元を 1 次の微分形式という。

$T^*(M) \wedge T^*(M)$ で外積を、 $T^*(M)^n = T^*(M) \wedge \dots \wedge T^*(M)$ 、特に $T^*(M)^0 = C(M)$ {M 上の滑らかな関

数 } を表す。

外微分 $d : T^*(M)^{n-1} \rightarrow T^*(M)^n$ を通常どおり、

$$d(a_{i_1 \dots i_{n-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}) = a_{i_1 \dots i_{n-1}}, \quad dx \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}$$

と定義する。以下簡単のため、 $d=3$ として、話をすすめる。

ベクトル場 $A \in T(M)$ に対して、次のように $T^*(M)$ の元 $\frac{1}{A}$ を対応させる。

$$\frac{1}{A}(\partial) = A \cdot \partial \quad (T(M) \text{ 内での内積})$$

また、ベクトル場 $A \in T^2(M)$ に対して、次のように $T^{*2}(M)$ の元 $\frac{2}{A}$ を対応させる。

$$\frac{2}{A}(\partial, \partial) = A \cdot [\partial, \partial] \quad (T(M) \text{ 内での } \partial, \partial \text{ の外積と } A \text{ の内積})$$

$[\partial, \partial]$ は、 $T(M)$ 内の外積であるが、ここでは次式で解釈する。

$$\partial \cdot [\partial, \partial] = \sqrt{g} \quad (, ,)$$

g は第 1 基本量 $G=(g_{ij})$ の行列式、 $(, ,)$ は 1、0、-1 をとる関数であり、置換 $(, ,)$ が置換 $(1,2,3)$ の偶置換 (偶数回の互換で $(1,2,3)$ から $(, ,)$ に到達) であれば 1、奇置換であれば -1 それ以外 (つまり重複する値がある場合) は 0 をとる。例えば、 $(1,2,3)=1, (2,3,1)=1, (3,1,2)=1, (2,1,3)=-1, (1,1,3)=0 \dots$ これから、 $[\partial, \partial] = -[\partial, \partial]$ が分かる。 $[,]$ の第一項、第 2 項とも線形性を有するので、上の定義を任意のベクトルに拡張できる。

これまでの定義で、少し面倒ではあるが、 $\frac{1}{\partial_i} \wedge \frac{1}{\partial_j} = \frac{2}{[\partial_i, \partial_j]}$ (付録 B) を示すことができる。

8.1 勾配

$f \in T^0(M)$ つまり滑らかな M 上の関数とする。 f の勾配 (gradient) $grad f \in T(M)$ を、 $df = \frac{1}{grad f}$ で定義する。

$grad f = (grad f) \partial$ とおくと、

$$df = f, \quad dx \text{ 従って、} df(\partial) = f, \quad \text{一方 } \frac{1}{grad f}(\partial) = grad f \cdot \partial = (grad f) g$$

故に

$$f, = (grad f) g$$

従って、

$$(grad f) = f, g$$

つまり、

$$grad f = f, g \partial \tag{19}$$

となる。

8.2 回転

$A \in T(M)$ とする、この時、 A の回転 (rotation)、 $\text{rot } A$ を ${}^2_{\text{rot}A} = d {}^1_A$ で定義する。以下、 $\text{rot } A = (\text{rot}A)^k \partial_k$ の成分 $(\text{rot}A)^k$ を計算する。

まず、 ${}^1_A = (A \cdot \partial_i) dx^i$ なので、 ${}^1_A = A g_{ij} dx^j$ 従って、 $d {}^1_A = (A g_{ij})_{,k} dx^k \wedge dx^i \Rightarrow$

$$d {}^1_A(\partial_i, \partial_j) = (A g_{ij})_{,k} - (A g_{ki})_{,j}$$

が成り立つ。一方、

$${}^2_{\text{rot}A}(\partial_i, \partial_j) = \text{rot}A \cdot [\partial_i, \partial_j] = (\text{rot}A)^k \partial_k \cdot [\partial_i, \partial_j] = \sqrt{g}(\text{rot}A)^k \quad (k, i, j)$$

従って、 ${}^2_{\text{rot}A} = d {}^1_A$ が $\text{rot } A$ の定義なので、

$$(\text{rot}A)^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \quad (k, i, j) \{ (A g_{ij})_{,k} - (A g_{ki})_{,j} \}$$

これを d (次元) = 3 を仮定して具体的に書くと

$$\begin{cases} (\text{rot}A)^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \{ (A g_{32})_{,1} - (A g_{23})_{,3} \} \\ (\text{rot}A)^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \{ (A g_{13})_{,2} - (A g_{31})_{,1} \} \\ (\text{rot}A)^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \{ (A g_{21})_{,3} - (A g_{12})_{,2} \} \end{cases} \quad (20)$$

となる。

8.3 発散

$d=3$ を仮定する。

$A \in T(M)$ とする、この時、 A の発散 (divergence) $\text{div} A$ を $\text{div} A = d {}^2_A$ で定義する。

ここで ${}^3 \in (T^*(M))^3$ は $T(M)$ 内のベクトル a, b, c の体積要素 $a \cdot (b \times c)$ を与える。特に、 ${}^3(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \sqrt{g}$ である。 $\text{div} A$ はスカラー量である。 A の成分 A を用いて、 $\text{div} A$ を体的に書いてみる。まず、

$${}^2_A(\partial_i, \partial_j) = A \cdot [\partial_i, \partial_j] = A \partial_k \cdot [\partial_i, \partial_j] = A \sqrt{g} \quad (k, i, j)$$

である。 ${}^2_A = a_{ij} dx^i \wedge dx^j$ とおくと、 ${}^2_A(\partial_i, \partial_j) = a_{ij} - a_{ji}$

故に

$$\sqrt{g} A = \frac{{}^2_A(\partial_i, \partial_j)}{(\partial_i, \partial_j)} = (k, i, j)(a_{ij} - a_{ji}) = (k, i, j)a_{ij} + (k, j, i)a_{ji}$$

一方、

$$d {}^2_A = a_{ij,k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = a_{ij,k} \quad (k, i, j) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = (a_{ij} \quad (k, i, j))_{,k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

となるので、

$d {}^2_A = \sum_k (k, i, j)a_{ij} + (k, j, i)a_{ji},_k dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \sum_k (\sqrt{g} A^k)_{,k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ つまり、

$$\text{div} A = d {}^2_A(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = d {}^2_A(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\sqrt{g} A^k)_{,k}$$

故に

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}A), \quad (21)$$

8.4 laplacian

$f \in T^0(M)$ に対するラプラシアンを $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ で定義する。 div 、 grad の定義を適用すると、
 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{\sqrt{g}}(f, g, \sqrt{g}), = (f, g), + \frac{1}{\sqrt{g}}(f, g) \sqrt{g}, =$

$$f, g + f, \{(g), + \frac{1}{\sqrt{g}}g(\sqrt{g}), \}^{*3} \quad (22)$$

が得られる。 g は今までどおり、第一基本量からなる行列 G の行列式である。上の式を、後のセクション(一般座標系でのブラウン運動)で、用いられる形(Laplace Beltrami operator)に変形していく。 $(i_1 \dots i_n)$ を今までの定義を拡張して、 $(i_1 \dots i_n)$ をソートする互換数が偶数であれば1、奇数であれば-1、同じ値のインデックス($i_1 = i_2$ など)がある場合は0とする。 $(i_1 \dots i_i^\vee \dots i_n)$ を $(i_1 \dots i_n)$ から i を除いた置換に関する ϵ とすると、 $(i_1 \dots i_n) = (-1)^{\epsilon+i} (i_1 \dots i^\vee \dots i_n)$ であることに注意する。次のことが言える。

$$dg = dg_{ij} g^{ij} g$$

(\therefore)

$g = \sum_{i_1 \dots i_n} (i_1 \dots i_n) g_{1i_1} \dots g_{ni_n}$ 従って、 $dg = \sum_{i_1 \dots i_n} (i_1 \dots i_n) g_{1i_1} \dots dg_{i_1} \dots g_{ni_n}$
 $= \sum_i \sum_{i_1 \dots i_n} dg_{i_1} (-1)^{\epsilon+i} \sum_{i_1 \dots i_i^\vee \dots i_n} (i_1 \dots i_i^\vee \dots i_n) g_{1i_1} \dots g_{i_i^\vee} \dots g_{ni_n}$
 $= \sum_i \sum_{i_1 \dots i_n} dg_{i_1} (-1)^{\epsilon+i} \det(G^{i_1})$ ここで、 G^{ij} は行列 G から i 行 j 列を取り除いた行列である。とこ
 ろで、 $g^{ij} = \frac{1}{g} \{G \text{ の } (ij) \text{ 余因子}\}$ かつ、 $\det G^{ij} (-1)^{i+j}$ は G の (ij) 余因子であるので、結局 $dg = dg_{ij} g^{ij} g$
 が示せる。□

このことから、 $g, = g_{ij}, g^{ij}g$ 、その両辺 g で割り、 g をかけると、 $\frac{1}{g}g, g = g_{ij}, g^{ij}g$ が言える。
 式(22)の第3項は、上式の $\frac{\text{左辺}}{2}$ なので、右辺を代入すると、

$$f, g + f, \{(g), + \frac{g_{ij}, g^{ij}g}{2}\} \quad (23)$$

となる。所で、接続係数 $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_{k,i} + g_{k,j} - g_{i,j})$ を用いて、 $g^{ij},_{ij}$ を計算すると、

$$g^{ij},_{ij} = -\frac{1}{2}g^{ij}g_{ij}, + g^{ij}g_{j,i} = -\frac{1}{2}g^{ij}g_{ij}, - g^{i,i}$$

($\therefore (g^{ij}g_{j,i})_{,i} = (g^{i,i})_{,i} = 0$ を展開すると上式の第2項と第3項の等号がでてくる。) となって、式(23)の
 $\{ \}$ 内を負にしたものに等しい。従って、式(23)=

$$f, g - f, g^{ij},_{ij} \quad (24)$$

つまり、 $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = f,_{ij} g^{ij} - f, g^{ij},_{ij}$ が成立する。

*3

式(22)の $\{ \}$ の中 = $\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g_{ij},)$ 、である。以下の計算は $\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g_{ij},) = -g^{ij},_{ij}$ を示している。

8.5 Laplace Beltrami operator

前 subsection での式 (24) を Laplace Beltrami operator と言う。

9 リーマン空間上のブラウン運動

このセクションでは、全面的に文献 [2, 180-199 ページ] を参照している。

9.1 定式化

M^d を d - 次元リーマン空間、その第一基本量を $G = \{g_{ij}\}$ 、 f を M^d 上の滑らかな関数で

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|f(x)\| = 0 \quad (25)$$

を満たすとする。 M^d 上の拡散過程 (連続パスを持つマルコフ過程) (X_t) を考える。

$u(f, t, x) = T_t f(x) = E_x[f(X_t)]$ とおく、 X_t のマルコフ性から

$$u(f, t + s, x) = u(T_s f, t, x) \quad (26)$$

上で定義した u に対して、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \quad (27)$$

を満たす場合に、 $\{X_t\}$ を M^d 上のブラウン運動という。ただし、 Δ は、Laplacian (= Laplace-Beltrami 作用素) つまり、 $\Delta u = \text{div}(\text{grad } u) = g^{ij} \nabla_i \nabla_j u$ (前セクション) である。

次の事がわかる。

拡散過程 X_t および条件 (25) を満たす f に対して、滑らかな関数 g があって、

$$df(X_t) = g(X_t) dB_t + \frac{1}{2} \Delta f dt \quad (28)$$

と表現されていれば、 X_t は式 (27) を満たす。即ち、 M^d 上のブラウン運動である。ここで、 $\{B_t\}$ は、ユークリッド空間上の通常の (M^d の局所座標系上に定義された) ブラウン運動である。

(\therefore)

まず、 $t=0$ で、式 (27) を満たすことを示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} E_x(f(X_t)) \Big|_{t=0} = E_x \left(\frac{\partial f(X_t)}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}$$

(28) より、

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t g(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f ds$$

両辺を積分して、

$$E_x[f(X_t) - f(X_0)] = E \left[\int_0^t g(X_s) dB_s \right] + \frac{1}{2} E \left[\int_0^t \Delta f ds \right]$$

$E \left[\int_0^t g(X_s) dB_s \right]$ は被積分関数 $g(X_s)$ と dB_s が独立なので、値は 0 となる。

従って、 $E_x[f(X_t) - f(X_0)] = \frac{1}{2} E \left[\int_0^t \Delta f ds \right] = \frac{1}{2} \int_0^t E_x[\Delta f] ds$ 両辺を t で微分して、 $t=0$ にすると、

$$\partial_t u(f, t, x)|_{t=0} = \frac{1}{2} E_x [f(X_t)]|_{t=0} = \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} u(0, x) \quad *4$$

となり、 $t=0$ の場合に証明された。この式が一般の $t > 0$ に対しても成立することは、 T_t の半群の性質 (26) からでてくる。□

9.2 ブラウン運動の構成

式 (28) を満たす拡散過程 X_t は、次のようにして構成する。

B を d -次元ユークリッド空間上の通常のブラウン運動、 (g) は、第一基本量の逆行列、 b は、その平方、即ち

$$\sum_{i,j} g_{ij} = g$$

および、 $b = -\frac{1}{2}g$ とおいて、 $\{X_t\}$ を

$$dX_t = dB + b dt \quad (29)$$

で定義する。

この式を満たす X_t は、式 (28) を満たすこと、即ち M^d 上のブラウン運動であることが分かる。

(\therefore) 伊藤の公式を用いて式の左辺を展開する。

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f, dX_t + \frac{1}{2} f, dX_t dX_t \\ &= f, dB_t + f, b dt + \frac{1}{2} f, \sum_{i,j} g_{ij} dt \\ &= f, dB_t + (f, b + \frac{1}{2} f, g) dt \\ &= f, dB_t + \frac{1}{2} (-g, f, +f, g) dt \\ &= f, dB_t + \frac{1}{2} f dt \quad \square \end{aligned}$$

10 ブラウン運動の実装

$$dX_t = dB + b dt, b = -\frac{1}{2}g$$

を 3 モデルで実装する。実装にあたって、 $dt=2^{-22}$ 程度、 $dB_t = B(t+dt) - B(t)$ は分散 dt 平均 0 の正規分布に従う乱数、 $dX_t = X_{n+1} - X_n$ と差分化する。

*4 この式で分かるように、 X_t がブラウン運動であるためには、 $df(X_t) = g(X_t) dB_t + h(X_t) dt$ とおくと、 $h(x) = \frac{1}{2} f$ でなければいけない。つまり、 X_t が M 上のブラウン運動であるためには、 $df(X_t)$ のドリフト部分は $\frac{1}{2} f$ であることが必要である。

10.1 Sphere モデル

$$G = \begin{pmatrix} g & g \\ g & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} r^{-2} & 0 \\ 0 & r^{-2} \sin^{-2} \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & r^{-1} \sin^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= -\sin \quad \cos, \quad = \frac{\cos}{\sin}, \text{その他は } 0$$

従って、

$$dX_t = dB_t + b dt = \frac{1}{r} dB_t - \frac{1}{2} g$$

$$= \frac{1}{r} dB_t - \frac{1}{2} g \quad dt = \frac{1}{r} dB_t - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2} (-\sin \quad \cos) dt$$

$$dX_t = \frac{1}{r} dB_t + \frac{1}{2r^2} \frac{\cos}{\sin} dt$$

および、

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} g = \frac{1}{r \sin} dB_t$$

上式内の $=X_t$ である。

まとめると、

$$\begin{cases} dX_t = \frac{1}{r} dB_t + \frac{1}{2r^2} \frac{\cos X_t}{\sin X_t} dt \\ dX_t = \frac{1}{r \sin X_t} dB_t \end{cases} \quad (30)$$

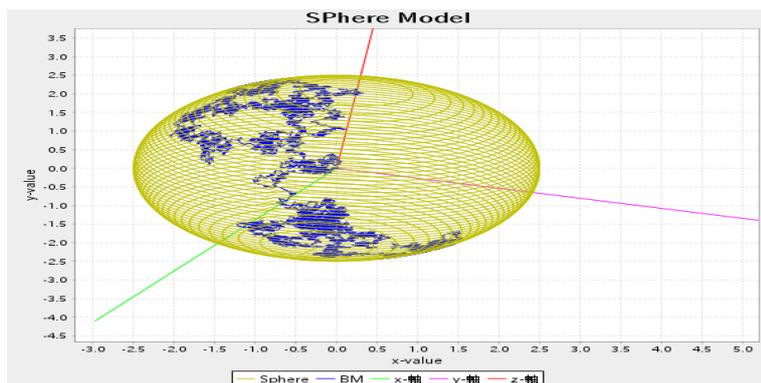


図 12 Brown Motion(Sphere)

10.2 Hyperbolic Model

$$G = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

$$g_{uv} = -\frac{1}{v}, \quad g_{uu} = \frac{1}{v}, \quad g_{vv} = -\frac{1}{v} \text{その他は } 0$$

従って、

$$dX_t^u = \frac{1}{v} dB_t^u - \frac{1}{2}g \quad u \quad dt = v dB_t^u$$

および、

$$dX_t^v = \frac{1}{v} dB_t^v - \frac{1}{2}g \quad v \quad = v dB_t^v + \left\{ -\frac{1}{2}v^2 \frac{1}{v} + \frac{1}{2}v^2 \frac{1}{v} \right\} dt = v dB_t^v$$

上式内の $v = X_t^v$ である。まとめると、

$$\begin{cases} dX_t^u = X_t^v dB_t^u \\ dX_t^v = X_t^v dB_t^v \end{cases} \quad (31)$$

ただし、 v の制限から $X_t^v > 1$ であるように乱数 dB_t^v を選択する。^{*5}

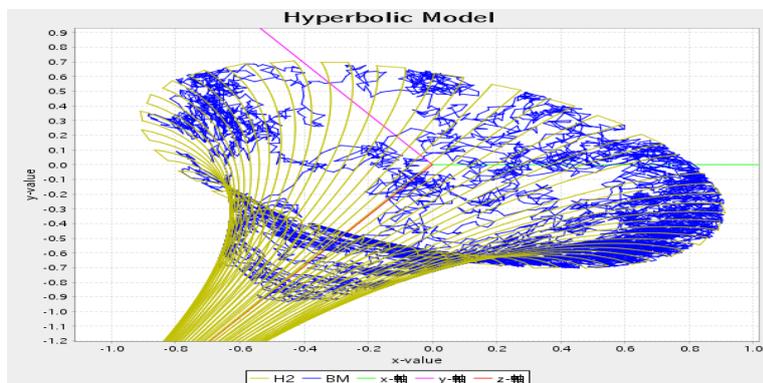


図 13 Brown Motion(H2)

10.3 NC-Model

$$G = \begin{pmatrix} g_{u^1 u^1} & g_{u^1 u^2} \\ g_{u^2 u^1} & g_{u^2 u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(u^1)^2 & 0 \\ 0 & h(u^1)^2 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} h(u^1)^{-2} & 0 \\ 0 & h(u^1)^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(u^1)^{-1} & 0 \\ 0 & h(u^1)^{-1} \end{pmatrix}$$

^{*5} プログラム上このような作りになってしまうが、境界がある場合の確率微分方程式の実装はもっと注意すべきかもしれない。

ここで、 $h(u) = \cosh(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$

$\frac{u^1}{u^1 u^1} = \tanh(u^1)$ 、 $\frac{u^1}{u^2 u^2} = -\tanh(u^1)$ 、 $\frac{u^2}{u^1 u^2} = \frac{u^2}{u^2 u^1} = \tanh(u^1)$ 、その他は 0

従って、

$$dX_t^{u^1} = \frac{u^1}{u^1} dB_t^{u^1} - \frac{1}{2}g^{11} \tanh(u^1) dt + \frac{1}{2}g^{22} \tanh(u^1) dt = \frac{1}{h(u^1)} dB_t^{u^1}$$

$$dX_t^{u^2} = \frac{u^2}{u^2} dB_t^{u^2} - \frac{1}{2}g^{11} \tanh(u^1) dt + \frac{1}{2}g^{22} \tanh(u^1) dt = \frac{1}{h(u^1)} dB_t^{u^2}$$

および、

$$dX_t^{u^2} = \frac{u^2}{u^2} dB_t^{u^2} - \frac{1}{2}g^{11} \tanh(u^1) dt + \frac{1}{2}g^{22} \tanh(u^1) dt = \frac{1}{h(u^1)} dB_t^{u^2}$$

上式内の $u^1 = X_t^{u^1}$ である。まとめると、

$$\begin{cases} dX_t^{u^2} = \frac{1}{h(X_t^{u^1})} dB_t^{u^1} \\ dX_t^{u^2} = \frac{1}{h(X_t^{u^1})} dB_t^{u^2} \end{cases} \quad (32)$$

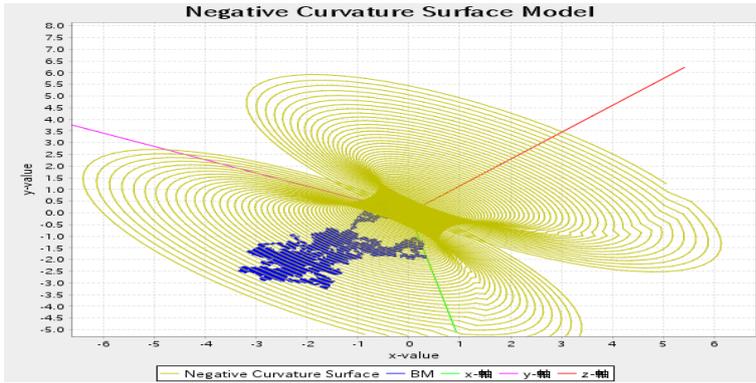


図 14 Brown Motion(NC)

付録 A sphere モデルの測地線が大円となること

f を sphere モデルを与える式 (1) とする。 $(t) = f((t), (t))$ とおく。つまり、

$$(t) = f((t), (t)) = (r \sin (t) \cos (t), r \sin (t) \sin (t), r \cos (t))$$

である。パラメータ t を弧長に (つまり、 $\| \dot{(t)} \|^2 = 1$ となるように) とっておく。まず (t) が測地線の方程式 $Proj_{(t)}(\ddot{(t)}) = 0$ を満たせば、

$$\ddot{(t)} = -1/r^2 (t) \quad (33)$$

となることを示す。式を簡単にするために以下 \dot{x}^i を x^1 、 \dot{x}^j を x^2 とおく。 $\dot{x}^i = f_{,i} \dot{x}^i$ 、 $\ddot{x}^i = f_{,ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + f_{,ik} \ddot{x}^k$ である。式(4)によれば、 $\ddot{x}^i = (f_{,ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + f_{,ik} \ddot{x}^k)$ となるので、 $\ddot{x}^i = Proj_{(t)}(\ddot{x}^i(t)) + h_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ が成立する。 \dot{x} が測地線であれば、右辺の第一項が0なので、

$$\ddot{x}^i = h_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (34)$$

となる。 $[a,b]$ をベクトル a 、 b の外積 ($a \times b$) とする。Sphere Model で、上の式の右辺を具体的に計算する。

$$= \frac{[f_{,i} \dot{x}^i, f_{,j} \dot{x}^j]}{\|[f_{,i} \dot{x}^i, f_{,j} \dot{x}^j]\|} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \frac{f}{r}$$

であることが分かる。

h_{ij} は、 $f_{,ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ なので

$$h_{11} = -r, h_{12} = h_{21} = 0, h_{22} = -r \sin^2 \theta$$

代入すると式(34)は、

$$\ddot{x}^i = (-r(\dot{x}^1)^2 - r \sin^2 \theta (\dot{x}^2)^2) \quad (35)$$

\dot{x} を弧長にとっているので、 $\|\dot{x}\|^2 = g^{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1$ 、sphere モデルの第1基本量を代入すると $\|\dot{x}\|^2 = r^2(\dot{x}^1)^2 + r^2 \sin^2 \theta (\dot{x}^2)^2$ なので、この式と $\dot{x}^i = f_{,i} \dot{x}^i = f/r$ を式(35)代入すると $\ddot{x}^i = -\frac{f}{r^2}$ となり式(33)が示された。式(33)が示されると $[\dot{x}(t), \ddot{x}(t)]$ は t によらないこと、つまり定ベクトル(以下 H とおく)となることが分かる。

∴

$$\frac{d}{dt}([\dot{x}(t), \ddot{x}(t)]) = [\dot{x}, \dot{x}] + [\ddot{x}, \dot{x}] = [\ddot{x}, \dot{x}] - [\dot{x}, \ddot{x}]/r^2 = 0 \quad \square$$

さらに、 $H = [\dot{x}(t), \ddot{x}(t)]$ はゼロベクトルではないことが分かる。

∴

\dot{x} は球面上のベクトルなので、 $\|\dot{x}\|^2 = r^2$ である。従ってそれを t で微分すると、0つまり、 $\dot{x}(t)$ は $\ddot{x}(t)$ と直交する。さらに \dot{x} および \ddot{x} は0でない。□

従って、

$$H \cdot \dot{x}(t) = [\dot{x}(t), \ddot{x}(t)] \cdot \dot{x}(t) = 0$$

となり $\dot{x}(t)$ は0でないベクトル H と常に直交する。これは、 $\dot{x}(t)$ が原点を通るベクトル H を法線としてもつ大円上にあることを示す。

付録 B $\frac{1}{\partial_i} \wedge \frac{1}{\partial_j} = \frac{2}{[\partial_i, \partial_j]}$

(∵) $\frac{1}{\partial_i} = \frac{1}{\partial_i}(\partial_j) dx^j = g_{ij} dx^j$ 従って、 $\frac{1}{\partial_i} \wedge \frac{1}{\partial_j} = g_{ij} g_{kl} dx^k \wedge dx^l$

つまり、 $\frac{1}{\partial_i} \wedge \frac{1}{\partial_j}(\partial_k, \partial_l) = g_{ij} g_{kl} - g_{il} g_{jk}$ である。

一方 $\frac{2}{[\partial_i, \partial_j]}(\partial_k, \partial_l) = [\partial_i, \partial_j] \cdot [\partial_k, \partial_l]$ について計算する。

$[\partial_i, \partial_j] = [\partial_i, \partial_j]^k \partial_k$ とおくと $[\partial_i, \partial_j] \cdot \partial_l = [\partial_i, \partial_j]^k g_{kl}$

$[\partial_i, \partial_j] \cdot \partial_l = (l, i, j) \sqrt{g}$ なので上の式(左辺)に代入して、

$[\partial_i, \partial_j]^k = (l, i, j) \sqrt{g} g^{lk}$ を得る。

従って、

$$\begin{aligned} \frac{2}{[\partial_i, \partial_j]}(\partial_k, \partial_l) &= [\partial_i, \partial_j]^k \partial_k \cdot [\partial_k, \partial_l] = (l, i, j) \sqrt{g} g^{lk} \partial_k \cdot [\partial_k, \partial_l] \\ &= (l, i, j) \sqrt{g} g^{lk} (k, \quad, \quad) \sqrt{g} = (l, i, j) (k, \quad, \quad) g g^{lk} \text{となる。} \end{aligned}$$

所で $g^{lk} = G^{lk}$ (余因子行列) $= (-1)^{l+k} G^{lk}$ (第 1 基本量からなる行列 G から l 行 k 列を除いた行列の行列式) であるので、

結局 $(-1)^{l+k} G^{lk} (l, i, j) (k, \dots) = g_i g_j - g_i g_j$ を示せば良いことになる。

両辺で、 i と j を入れ替えると、ともに符号が変わるので、 $i < j$ を仮定して示せば良いことになる。ところで、 $i < j$ では $(-1)^l (l, i, j) = -1$ 同様に、 $(-1)^k (k, \dots) = -1$ なのでつまり、 $G^{lk} = g_i g_j - g_i g_j$ が $i < j$ の時に成立すればよいことになるが、それは、 G^{lk} の定義である。□

付録 C トーラスモデル

トーラスモデルを追加する。

$$f(\theta, \phi) = (\cos(\phi)(r_2 \cos \theta + r_1), \sin(\phi)(r_2 \cos \theta + r_1), r_2 \sin \theta) \quad (36)$$

r_1, r_2 は正の定数、 r_1, r_2 のとり方は、図 (15) を参照

$\text{opt}[1]$ が半径 r_1 、 $\text{opt}[2]$ が半径 r_2 の円を表す。 θ は z 軸を回転軸とし、 x 軸を起点 ($\theta = 0$) とする $\text{opt}[1]$ の角度、 ϕ は $\text{opt}[2]$ の角度で、 x 軸上 r_1 を中心とし、 x 軸の正方向を起点とする角度である。

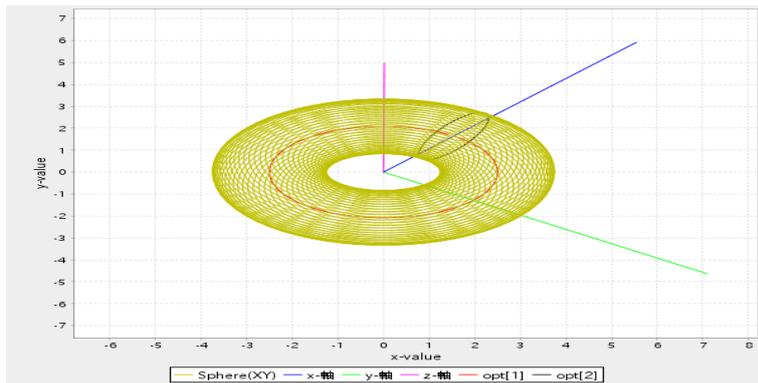


図 15 torus モデル

C.1 第一基本量

$$\begin{aligned} f_{,1} &= (-\sin \phi (r_2 \cos \theta + r_1), \cos \phi (r_2 \cos \theta + r_1), 0) \\ f_{,2} &= (\cos \phi (-r_2 \sin \theta), -\sin \phi r_2 \sin \theta, r_2 \cos \theta) \end{aligned}$$

従って、

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_2 \cos \theta + r_1)^2 & 0 \\ 0 & r_2^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_2 \cos \theta + r_1)^{-2} & 0 \\ 0 & r_2^{-2} \end{pmatrix} \quad (38)$$

および、 $g = r_2^2 (r_2 \cos \theta + r_1)^2$ 、 $\sqrt{g} = r_2 (r_2 \cos \theta + r_1)$

C.2 接続係数

$$\begin{aligned} g_{,1} &= 0 \\ g_{,2} &= -2r_2 \sin \theta (r_2 \cos \theta + r_1) \\ g_{,3} &= 0 \\ g_{,4} &= 0 \\ g_{,5} &= g_{,6} = 0 \quad (\theta = \text{or } \phi) \end{aligned}$$

接続係数 $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (-g_{jk, l} + g_{kl, j} + g_{lj, k})$ であった。従って、それぞれ代入して計算すると

$$\begin{aligned} &= 0 \\ &= \frac{\sin \theta (r_2 \cos \theta + r_1)}{r_2} \\ &= -\frac{\sin \theta r_2}{r_2 \cos \theta + r_1} \\ &= 0 \\ &= \\ &= \\ &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(39)

C.3 ヘシアン

ヘシアン (第2基本量) h_{ij} の定義は、 $f_{,i} = f_{,j} + h_{ij} \left(\frac{f_{,i} \times f_{,j}}{\|f_{,i}\| \times \|f_{,j}\|} \right)$ であった。これを計算すると、 $h_{11} = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta)$ であり、各ヘシアンは

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\cos \theta (r_2 \cos \theta + r_1) \\ h_{12} &= -r_2 \\ h_{13} &= h_{14} = 0 \end{aligned}$$

つまり、ヘシアン行列 H は、

$$H = \begin{pmatrix} -\cos \theta & (r_2 \cos \theta + r_1) & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

C.4 曲率

第一基本量 G およびヘシアン H が分かったので、ガウス曲率および平均曲率は $K = \sqrt{G^{-1} H G^{-1}}$ の行列式およびトレース/2 であった。

従って

$$\text{ガウス曲率} = \frac{1}{r_2} \cos \theta \frac{1}{r_2 \cos \theta + r_1}$$

$$\text{平均曲率} = -\frac{1}{2} \frac{2r_2 \cos \theta + r_1}{r_2(r_2 \cos \theta + r_1)}$$

C.5 測地線

[1, pp. 117–118] も参照

$(t) = f(\theta(t), \phi(t))$ が測地線であることは、 $\text{proj}_{T\mathcal{M}} \left(\frac{d}{dt} \dot{\theta} \right) = 0$ であった。 f の成分ごとに表すと、 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$ および弧長を t にとることで、 $\|\dot{\theta}\|^2 = g_{\theta\theta} (\dot{\theta})^2 + g_{\phi\phi} (\dot{\phi})^2 = 1$ であった。この式に torus モデルの接続係数、第一基本量を代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{2 \sin \theta r_2}{r_2 \cos \theta + r_1} \dot{\theta} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} &= \frac{\sin \theta}{r_2 \cos \theta + r_1} \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (41)$$

$$(r_2 \cos \theta + r_1)^2 (\dot{\theta})^2 + r_2^2 (\dot{\phi})^2 = 1 \quad (42)$$

$\dot{\theta} \neq 0$ を仮定すると式 (41) は、定数 c を含む次式になる。

$$\dot{\theta} = e^c (r_2 \cos \theta + r_1)^{-2}$$

また $\dot{\phi} = 0$ の場合は、次式をえる。

$$\theta(t) = \pm r_2^{-1} t + \theta_0$$

C.6 ブラウン運動

第一基本量が与えられているリーマン曲面上のブラウン運動は、 $dX_t = \sigma dB_t + b dt$, $b = -\frac{1}{2}g$

ここで $g_{ij} = g^{ij}$ であった。具体的に値を代入すると、 $\sigma = \frac{1}{r_2 \cos \theta + r_1}$ 、 $b = r_2^{-1}$ 、 $\dot{\theta} = 0$ および $b = 0$ 、 $b = -\frac{\sin \theta}{2r_2(r_2 \cos \theta + r_1)}$ 従って、次式を得る。

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{r_2 \cos \theta + r_1} dB_t \\ dX_t &= \frac{1}{r_2} dB_t - \frac{\sin \theta}{2r_2(r_2 \cos \theta + r_1)} dt \end{aligned}$$

付録 D Sphere Model XY-座標

Sphere モデルを 1.1 とは異なった局所座標系で記述する。目的は、ブラウン運動の座標依存性の有無を確認することにある。特にドリフト項の意味を確認したい。

$$f(x, y) \rightarrow (x, y, z), z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad (43)$$

z の符号のとり方は、後述する。

D.1 第一基本量

$$f_{,x} = (1, 0, -\frac{x}{z}), f_{,y} = (0, 1, -\frac{y}{z})$$

従って、

$$G = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{z^2} & \frac{xy}{z^2} \\ \frac{xy}{z^2} & 1 + \frac{y^2}{z^2} \end{pmatrix}$$

$$g = \frac{r^2}{z^2}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{xx} & g^{xy} \\ g^{yx} & g^{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy \\ -xy & r^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

D.2 接続係数

$$g_{xx,x} = \frac{2x(r^2 - y^2)}{z^4}, g_{xx,y} = \frac{2x^2y}{z^4}, g_{xy,x} = g_{yx,x} = \frac{y(z^2 + 2x^2)}{z^4}$$

$$g_{xy,y} = g_{yx,y} = \frac{x(z^2 + 2y^2)}{z^4}, g_{yy,x} = \frac{2xy^2}{z^4}, g_{yy,y} = \frac{2y(r^2 - x^2)}{z^4}$$

故に、接続係数 $k_{ij}^k = g^k (-g_{ij, k} + g_{j, ki} + g_{i, kj})$ は次のようになる。

$$\frac{x}{xx} = \frac{x(r^2 - y^2)}{r^2 z^2}, \quad \frac{y}{xx} = \frac{y(r^2 - y^2)}{r^2 z^2}, \quad \frac{x}{xy} = \frac{x^2 y}{r^2 z^2}$$

$$\frac{y}{xy} = \frac{xy^2}{r^2 z^2}, \quad \frac{x}{yy} = \frac{x(r^2 - x^2)}{r^2 z^2}, \quad \frac{y}{yy} = \frac{y(r^2 - x^2)}{r^2 z^2}$$

$$\frac{x}{yx} = \frac{x}{xy}, \quad \frac{y}{yx} = \frac{y}{xy}$$

D.3 ブラウン運動

リーマン曲面上のブラウン運動は次の確率微分方程式の解

$$dX_t = \quad dB_t + b \, dt, \quad = \sqrt{G^{-1}}, b = -\frac{1}{2}g$$

であった。Sphere モデル (XY-座標) で、 b を求める。まず G は対称正定値行列の Cholesky 分解から簡単に 3 角行列としてもとまって、

$$= \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} & -\frac{xy}{r\sqrt{x^2+z^2}} \\ 0 & \sqrt{1-\frac{y^2}{r^2}} \end{pmatrix}$$

また、単純計算で

$$b^x = -\frac{1}{2}g \quad x = -\frac{x}{r^2}$$

$$b^y = -\frac{1}{2}g \quad y = -\frac{y}{r^2}$$

が求まる。従って、Sphere-Model (XY-座標) でのブラウン運動の確率微分方程式は

$$dX_t^x = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} dB_t^x - \frac{xy}{r\sqrt{x^2+z^2}} dB_t^y - \frac{x}{r^2} dt \quad (44)$$

$$dX_t^y = \sqrt{1-\frac{y^2}{r^2}} dB_t^y - \frac{y}{r^2} dt \quad (45)$$

となる。

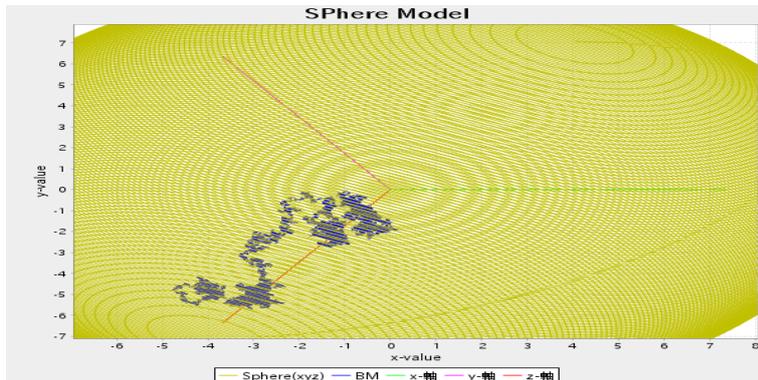


図 16 BrownMortion Sphere モデル (XY-座標)

付録 E SphereModel 上のブラウン運動 (モデルからの座標変換)

ここでは、SphereModel 上のブラウン運動 (subsection 10.1) から求めた式から直接、 θ, ϕ を x, y に座標変換して、 dx, dy が満たすべき確率微分方程式をもとめてみる。 x, y と θ, ϕ の関係は

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$$

であった。 $dx = r \sin \theta \cos \phi = f(\theta, \phi)$ を展開してみると、

$$dx = f, d\theta + f, d\phi + \frac{1}{2}\{f, d\theta^2 + 2f, d\theta d\phi + f, d\phi^2\}$$

ここで、 $d\theta, d\phi$ は式 (30) から

$$d\theta = \frac{1}{r} dB_t + \frac{1}{2r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} dt$$

$$d\phi = \frac{1}{r \sin \theta} dB_t$$

なので、これを代入し、さらに $f, \theta = r \cos \theta \cos \phi, f, \phi = -r \sin \theta \sin \phi$ および、 f, θ, f, ϕ の値を代入し、伊藤の公式を用いてまとめると

$$dx = \cos \theta \cos \phi dB_t - \sin \theta dB_t - \frac{x}{r^2} dt$$

を得る。同様に

$$dy = \cos \theta \sin \phi dB_t + \cos \theta dB_t - \frac{y}{r^2} dt$$

を得る。つまり式 (44)、(45) とドリフト項は等しい。しかし、次のようにブラウン運動の軌跡は同じ乱数を用いているにも関わらず、異なる。

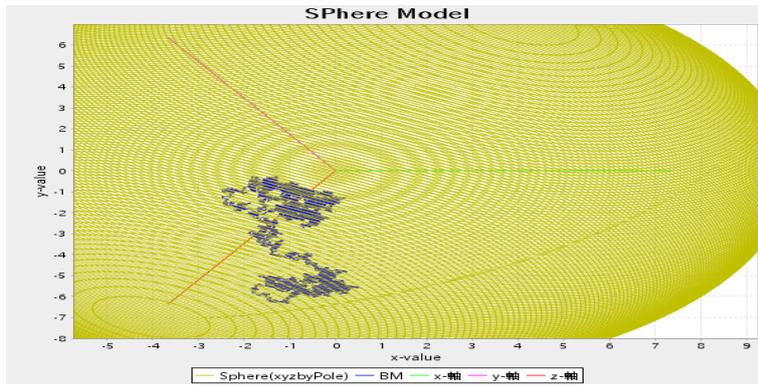


図 17 BrownMortion Sphere モデル (XY-Pole 座標)

参考文献

- [1] V.I. アーノルド. 古典力学のエルゴード問題. 吉岡書店, 1972. 吉田耕作訳.
- [2] 高橋陽一郎 (編). 伊藤清の数学. 日本評論社, 2011.
- [3] 小林治. 曲線・曲面論, 2013. <http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/kobayashi/cs.pdf>.