2016/06/27

２次曲面上のブラウン運動 理論仕様書２０１６版（局所座標によらない表現とドリフト項の意味）

大野泰治郎[*1]

目次

1 目的

２０１５版 [3] では、文献 [2, pp. 180–199] に従って、d 次元リーマン曲面 (M) 上のブラウン運動を構成する方法を示し、いくつかの 2 次曲面上に、ブラウン運動を実現するシミュレーションプログラムを与えた。この版では、加えて、文献 [1] を参考として、リーマン曲面のブラウン運動のドリフト項の意味および、蓋然性を表す部分（つまり dB_t の係数）が座標変換で不変となるように構築できることを示す。最後に球面上の２つの局所座標による表現で、シミュレーション結果が不変であることを与える。

2 リーマン面上のブラウン運動 2015 版から必要な項の抜粋

M を d 次元リーマン多様体、その開集合 U 上での局所座標を $\{u^i\}$、$\{B^i\}$ を局所座標上の通常 (ユークリッド空間として) の d 次元ブラウン運動、$r(u)$ を局所座標 $\{u^i\}$ から M への写像、$\{g_{i,j}\}$ をその第一基本量、すなわち $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial u^i}$ として、$g_{ij} = r_{,i} \cdot r_{,j}$ (内積) さらに、(g^{ij}) を第一基本量の逆行列、σ^i_j を、(g^{ij}) の平方、即ち

$$\sum_k \sigma^i_k \sigma^j_k = g^{ij}$$

また、接続係数 Γ^k_{ij} および h_{ij} を r の 2 階微分 $r_{,ij} = \frac{\partial r}{\partial u^i u^j} = \Gamma^k_{ij} r_{,k} + h_{ij} \eta$ で定義する。(つまり、Γ^k_{ij} は、接ベクトル $r_{,k}$ の成分であり、η は接ベクトルと直交する正規化されたベクトル (3 次元内のリーマン曲面

*1 1950 年生まれ、鹿児島大学数学科大阪市立大学修士京都大学理学部博士を経て、情報数理研究所に入社、在学時代の専攻は、エルゴード理論、会社時代は、人工知能および人工衛星 TERRA に搭載された ASTER センサーの運用プログラムの開発などを担当、退職後、コンピュータと数学との間の諸問題をランダムに追跡

（d=2）の場合は長さ 1 の法線ベクトル、h_{ij} はヘシアン）, $b^k = -\frac{1}{2}g^{ij}\,\Gamma^{\,k}_{ij}$ とおいて、$\{u^k_t\}$ を

$$du^i_t = \sigma^{\,i}_{\,j} dB^j_t + b^i dt \tag{1}$$

と与えると、この式を満たす $\{u^i_t\}$ は、M 上の（例えば有界なサポートをもつ滑らかな）関数 f に対して、

$$\frac{\partial E_u f(u_t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_u E_u[f(u_t)] \tag{2}$$

を満たすこと、即ち M^d 上のブラウン運動であることが分かる。([3, section 9]) ここで Δ_u は変数 $\{u^i\}$ にたいする Laplace Bertrami operator 文献 ([3, section 8.5])。

3 ドリフト項の意味

上のセクションで定義された u_t、r(u) を用いる。$r(u_t)$ が実際の M 上に表現されたブラウン運動であるが、$r(u_t)$ が満たす方程式は、伊藤の公式によれば、

$$\begin{aligned} dr &= r_{,i}\, du^i + \frac{1}{2} r_{,i,j}\, du^i du^j && (3)\\ &= r_{,i}\ \sigma^{\,i}_{\,j} dB^j + \frac{1}{2}(r_{,i,j} \sum_k \sigma^{\,i}_{\,k}\,\sigma^{\,j}_{\,k} + 2r_{,i}\, b^i) && (4)\\ &= r_{,i}\ \sigma^{\,i}_{\,j} dB^j + \frac{1}{2}(r_{,i}\,(-\Gamma^{\,i}_{jk} g^{jk}) + g^{jk} r_{,jk}\,)dt && (5) \end{aligned}$$

となる。

このドリフト項 (dt の係数) は、ベクトル r の (直交座標系としての) Laplace Bertrami operator$\frac{1}{2}\ \Delta$ r であり、一方、接続係数の定義により、$g^{jk}(r_{,jk} - \Gamma^{\,i}_{jk} r_{,i}\,) = g^{jk} h_{ij}\,\eta$ となる。前セクションで述べたように d=2 では、h_{ij} はヘシアンであり、η は曲面の接平面に対する法線ベクトルである。$g^{jk}h_{ij}$ は、文献 ([3][section 7 脚注]) によれば平均曲率・d である。とくに d = 2 の場合は、式 5 のドリフト項は平均曲率・η、つまり 2 次曲面でのブラウン運動のドリフト項は各曲面上の点で、法線ベクトル方向に平均曲率分働くということになる。また、文献（[3][section 9.1 脚注]）によれば、この $r(u_t)$ のドリフト項がラプラシアンの形で与えられることは、u_t がブラウン運動になるための必要条件である。つまり、2 次曲面 M 上で与えられたブラウン運動（確率微分方程式の形で与えられた）のドリフト項は、その曲面上の法線ベクトル方向に平均曲率分働く。このことは、d が一般（$d > 2$) でも同様の議論ができる。

4 蓋然項が座標不変となる表現

[3] では、M 上のブラウン運動の構成に、

$$du^i_t = \sigma^{\,i}_{\,j} dB^j_t + b^i dt \tag{6}$$

を使用した。この時 ($\sigma^{\,i}_{\,j}$) は、(g^{ij}) の平方を与える（滑らかな）行列であればなんでもよく、実際 [3] であたえた 2 次曲面上のブラウン運動の具体例では、(g^{ij}) を Cholesky 分解（上三角行列として非負値対象行列の平方を与える方法）した結果を $\sigma^{\,i}_{\,j}$ とした。しかしながら、その結果 $\sigma^{\,i}_{\,j} dB^j_t$ は座標変換で不変ではなく、したがって出力される M 上のブラウン運動も座標依存のものになった。([3, 付録 D、E]）ここでは、[1] のアイ

デアに従い、概然部分の次元をひとつあげて $g^{ij}r_{,j}\cdot dB_t$ を考える。ここで dB_t はベクトルで・はベクトル上の内積、つまり d=2 であれば、3 次元のカルテジアン（つまり R^3）上の通常のブラウン運動であり・は通常の意味での内積である。また、$(g^{il}r_{,l}\cdot dB_t)(g^{jl'}r_{,l}'\cdot dB_t)= g^{il}r_{,l}\cdot r_{,l'}\, g^{jl'}dt{=}g^{il}g_{ll'}g^{jl'}\ {=}g^{il}\,\delta_{\,l}^{\,j}{=}g^{ij}$ となることに注意すると、$g^{ij}r_{,j}\cdot dB_t$ は $\sigma_{\,j}^{\,i}dB_t^j$ の代わりになることが分かる。
まとめると

$$du_t^i = g^{ij}r_{,j}\cdot dB_t + b^i dt \tag{7}$$

$$b^k = -\frac{1}{2}g^{ij}\,\Gamma_{\,ij}^{\,k} \tag{8}$$

を用いて、dr を展開すると、

$$\begin{aligned}
dr &= r_{,i}\,du^i + \frac{1}{2}r_{,ij}\,du^i du^j \\
&= r_{,i}\,g^{ik}r_{,k}\cdot dB_t + \frac{1}{2}\{2r_{,i}\,b^i dt + r_{,ij}\,(g^{ik}r_{,k}\cdot dB_t)(g^{ik'}r_{,k}'\cdot dB_t)\} \\
&= r_{,i}\,g^{ik}r_{,k}\cdot dB_t + \frac{1}{2}\{2r_{,i}\,b^i + r_{,ij}\,(g^{ik}g^{jk'}r_{,k}\cdot r_{,k}')\}dt \\
&= r_{,i}\,g^{ik}r_{,k}\cdot dB_t + \frac{1}{2}\{-r_{,i}\,g^{kl}\,\Gamma_{\,kl}^{\,i} + r_{,ij}\,g^{ik}g^{jk'}g_{kk'}\}dt \\
&= r_{,i}\,g^{ik}r_{,k}\cdot dB_t + \frac{1}{2}\{-r_{,i}\,g^{kl}\,\Gamma_{\,kl}^{\,i} + r_{,ij}\,g^{ik}\,\delta_{\,k}^{\,j}\}dt \\
&= r_{,i}\,g^{ik}r_{,k}\cdot dB_t + \frac{1}{2}\{g^{kl}(r_{,kl} - \Gamma_{\,kl}^{\,i}r_{,i})\}dt
\end{aligned}$$

となり、前セクションで示したように dr のドリフト項 $\frac{1}{2}\{g^{kl}(r_{,kl}-\Gamma_{\,kl}^{\,i}r_{,i})\}$ は幾何的量（d=2 では、法線方向で、その大きさは平均曲率)、蓋然項 $r_{,i}\,g^{ik}r_{,k}$ は、座標変換で不変な量である。

5 サンプル

球面上の 2 つの座標系でのシミュレーションをあたえる。

5.1 θ, φ

局所座標から M への写像を f(今まで r としてきたが球面の半径と混乱するので)、r を球面の半径として、[3, 節 1.1,2.1,3.1] より

$$
\begin{aligned}
f &= (rsin\ \theta\ cos\ \phi, rsin\ \theta\ sin\ \phi, rcos\ \theta) \\
f,_{\theta} &= (rcos\ \theta\ cos\ \phi, rcos\ \theta\ sin\ \phi, -rsin\ \theta) \\
f,_{\phi} &= (-rsin\ \theta\ sin\ \phi, rsin\ \theta\ cos\ \phi, 0) \\
g_{\theta\theta} &= r^2 \\
g_{\phi\phi} &= r^2 sin^2\theta \\
g_{\theta\phi} &= g_{\phi\theta} = 0 \\
g^{\theta\theta} &= r^{-2} \\
g^{\phi\phi} &= r^{-2} sin^{-2}\theta \\
g^{\theta\phi} &= g^{\phi\theta} = 0 \\
\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} &= 0,\ \Gamma^{\theta}_{\theta\phi} = 0,\ \Gamma^{\theta}_{\phi\theta} = 0,\ \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -sin\ \theta\ cos\ \theta, \\
\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} &= 0,\ \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \frac{cos\ \theta}{sin\ \theta},\ \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{cos\ \theta}{sin\ \theta},\ \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} = 0
\end{aligned}
$$

式 (7)、(8) に代入する。

$$
\begin{aligned}
d\ \theta &= \frac{1}{r^2} f,_{\theta} \cdot dB_t + \frac{1}{2r^2}\frac{cos\ \theta}{sin\ \theta}dt \\
&= \frac{1}{r}(cos\ \theta\ cos\ \phi, co\ \theta\ sin\ \phi, -sin\ \theta) \cdot dB_t + \frac{1}{2r^2}\frac{cos\ \theta}{sin\ \theta}dt \\
d\ \phi &= \frac{1}{r^2 sin^2\theta} f,_{\phi} \cdot dB_t \\
&= \frac{1}{rsin\ \theta}(-sin\ \phi, cos\ \phi, 0) \cdot dB_t
\end{aligned}
$$

この式を離散化して、初期値 $(\theta_0, \phi_0)=(4/\pi, 4/\pi)$ で θ_t, Φ_t をシミュレートし、$f(\theta_t, \Phi_t)$ で球面 (r=10.) 上に配置した図が以下である。

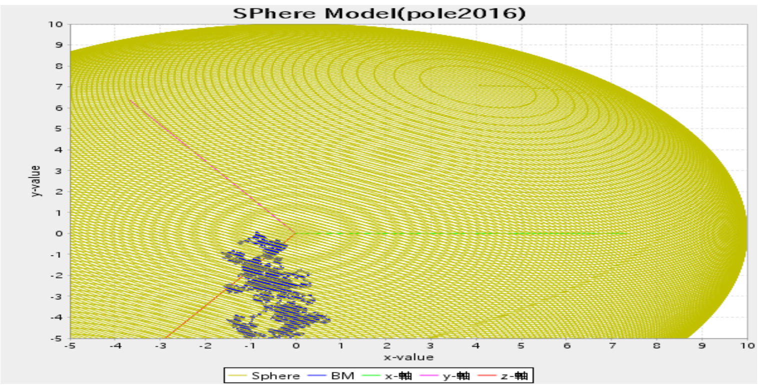

図 1　BrownMortion Sphere モデル (2016 版 Pole 座標)

5.2 x,y

[3, 付録 D] より

$$f(x,y) \longrightarrow (x,y,z), z=\sqrt{r^2-x^2-y^2} \tag{9}$$

$$f_{,x}=(1,0,-\frac{x}{z}), f_{,y}=(0,1,-\frac{y}{z})$$

$$G=\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\frac{x^2}{z^2} & \frac{xy}{z^2} \\ \frac{xy}{z^2} & 1+\frac{y^2}{z^2} \end{pmatrix}$$

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} g^{xx} & g^{xy} \\ g^{yx} & g^{yy} \end{pmatrix}=\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy \\ -xy & r^2-y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\,x}_{\,xx} &= \frac{x(r^2-y^2)}{r^2z^2} \\
\Gamma^{\,y}_{\,xx} &= \frac{y(r^2-y^2)}{r^2z^2} \\
\Gamma^{\,x}_{\,xy} &= \frac{x^2y}{r^2z^2} \\
\Gamma^{\,y}_{\,xy} &= \frac{xy^2}{r^2z^2} \\
\Gamma^{\,x}_{\,yy} &= \frac{x(r^2-x^2)}{r^2z^2} \\
\Gamma^{\,y}_{\,yy} &= \frac{y(r^2-x^2)}{r^2z^2} \\
\Gamma^{\,x}_{\,yx} &= \Gamma^{\,x}_{\,xy} \\
\Gamma^{\,y}_{\,yx} &= \Gamma^{\,y}_{\,xy}
\end{aligned}$$

式 (7)、(8) に代入する。

$$\begin{aligned}
dx &= (\frac{r^2-x^2}{r^2}f_{,x}-\frac{xy}{r^2}f_{,y})\cdot dB_t-\frac{1}{2}g^{ij}\,\Gamma^{\,x}_{\,ij}dt \\
dy &= (\frac{-xy}{r^2}f_{,x}+\frac{r^2-y^2}{r^2}f_{,y})\cdot dB_t-\frac{1}{2}g^{ij}\,\Gamma^{\,y}_{\,ij}dt
\end{aligned}$$

$-->$

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{1}{r^2}(r^2-x^2,-xy,-xz)\cdot dB_t-\frac{x}{r^2}dt \\
dy &= \frac{1}{r^2}(-xy,r^2-y^2,-yz)\cdot dB_t-\frac{y}{r^2}dt
\end{aligned}$$

この式を離散化して、初期値 (x_0,y_0)=r(1/2,1/2) で x_t,y_t をシミュレートし、$f(x_t,y_t)$ で球面 (r=10.) 上に配置した図が以下である。

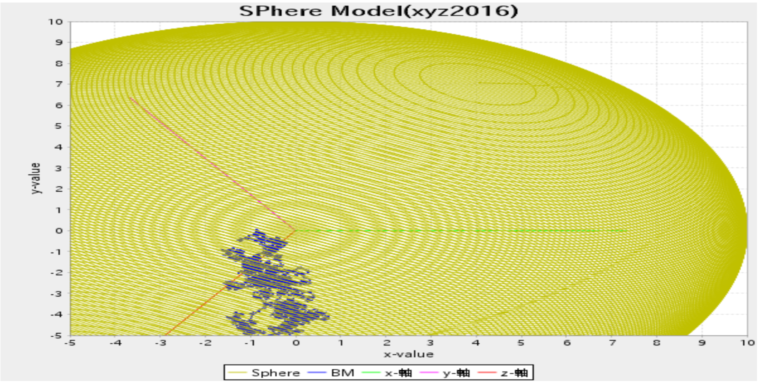

図 2　BrownMortion Sphere モデル (2016 版 XY-座標)

5.3　比較

両者の比較（pole 版のデータと xy 版データの同時刻での座標の差の絶対値、X 軸は時間ステップ）をグラフにしたものを次に与える。

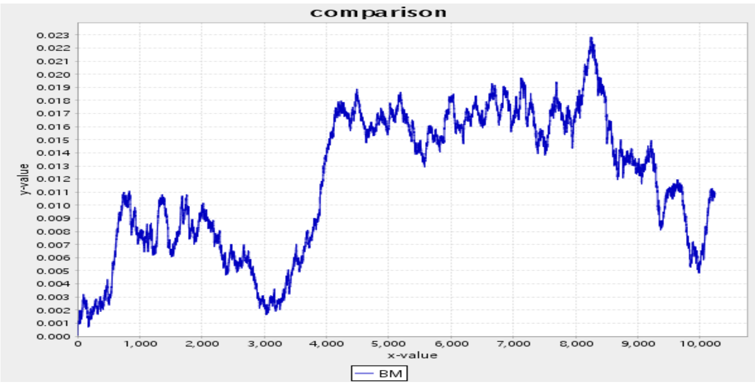

図 3　pole モデルと XY モデルの差異

図のように極座標で表現したブラウン運動と、直交（x、y）座標で表現したブラウン運動の差異はない（理論上一致するのだから当然であるが）としてよい。

参考文献

[1] Richard M. Durran and Aubrey Truman. Brownian motion on hypersurfaces and computer simulation, 1988. In Stochastic Mechanics and Stochastic Process, Lecture Note Math.,1325, 89-100.

[2] 高橋陽一郎（編）. 伊藤清の数学. 日本評論社, 2011.

[3] 大野泰治郎. 理論仕様書 2015.12.22（2 次曲面上の測地線とブラウン運動）, 2015. http://54.238.140.1/tips.html.